GT-12
Educação Estatística

Investigações Hispano-Brasileiras em Educação Estatística

ORGANIZADORES:
Celso Ribeiro Campos
e Andréa Pavan Perin

Akademy
EDITORA

INVESTIGAÇÕES HISPANO-BRASILEIRAS EM EDUCAÇÃO ESTATÍSTICA

ORGANIZADORES:

Celso Ribeiro Campos

Andréa Pavan Perin

BRASIL, 2020

Akademy EDITORA

Editor-chefe: José F. da Silva Junior
Diagramação: Editora Akademy
Capa: Bruno Fonseca
Revisão: Celso Ribeiro Campos

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

C198

Campos, Celso Ribeiro; Perin, Andréa Pavan (organizadores)
Investigações hispano-brasileiras em educação estatística.
Taubaté: Editora Akademy, 2020.

Vários autores
Bibliografia
ISBN 978-65-990615-4-7

1. Educação estatística 2. Livros didáticos 3. Literacia 4. Formação de professores
5. Probabilidade 6. Gráficos e tabelas
I. Título

CDD: 372.7
CDU: 37.02

Índices para catálogo sistemático:
1. Educação matemática 372.7

Editora Akademy - Taubaté, SP
Conheça nossos lançamentos, visite nosso site:
https://www.akademy.com.br/home/editora/

APRESENTAÇÃO

O Grupo de Trabalho número 12 (GT12 – Educação Estatística) da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), tem como objetivo desenvolver pesquisas para compreender como as pessoas ensinam e aprendem Estatística, o que envolve os aspectos epistemológicos, metodológicos, cognitivos e afetivos do ensino-aprendizagem, envolvidos nos conceitos estatísticos. Objetiva também fomentar o desenvolvimento de métodos e materiais de ensino, visando o desenvolvimento do letramento estatístico e dando visibilidade às pesquisas desenvolvidas por seus membros. No contexto da Educação Estatística, os pesquisadores do GT12 utilizam recursos teórico-metodológicos de outras áreas, como Educação Matemática, Educação Crítica, Psicologia, Pedagogia, Filosofia e Matemática, além da própria Estatística.

O grupo se reúne periodicamente em fóruns e no Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM). Para o triênio 2018-2021, o GT tem a professora Suzi Samá como coordenadora e o professor José Ivanildo como seu vice. Formam o comitê científico os professores Ailton Paulo de Oliveira Junior, Celso Ribeiro Campos e Marta Élid Amorim.

No âmbito dos trabalhos de pesquisa do GT12, diversas interações ocorrem entre seus membros e entre pesquisadores de outros GTs, estudantes de pós-graduações em Educação Matemática interessados em investigações sobre Educação Estatística, etc. Essas interações se mostram muito profícuas na medida em que ampliam os horizontes de pesquisas, absorvendo novos temas e novos olhares sobre as problemáticas típicas do ensino-aprendizagem de Estatística nos diversos níveis escolares. E dessa forma os pesquisadores contribuem para um aprofundamento dos temas investigados e desenvolvem experimentações e constructos teóricos e práticos.

Sabendo que a Espanha dispõe de pesquisadores renomados na área de Educação Estatística, interações entre os membros do GT12 e os espanhóis foram se tornando mais frequentes e, assim, foi possível agendar para maio de 2020 um Seminário Hispano-Brasileiro de Educação Estatística. O objetivo desse evento era, então, aproximar as pesquisas desenvolvidas em ambos os países e proporcionar parcerias para novas investigações, a serem apresentadas nos diversos congressos programados para os anos de 2021 e 2022, entre eles o IX CIBEM – Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática, organizado pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, e o XI ICOTS – *International Conference on Teaching Statistics*, marcado para 2022 na cidade de Rosário, Argentina.

Outros objetivos não menos importantes do seminário foram:

- Fomentar a produção científica em Educação Estatística, realizada em colaboração a médio e longo prazo entre Espanha e Brasil, incluindo estudos comparativos, replicação de trabalhos com novas variáveis ou reanálise de trabalhos anteriores a partir de outras perspectivas teóricas.

- Desenvolver projetos conjuntos de pesquisa e buscar fontes de financiamento.
- Elaborar propostas conjuntas de formação de professores e melhoria da Educação Estatística nas escolas.
- Promover visitas internacionais de pesquisadores e alunos dos cursos de mestrado e doutorado das universidades participantes;
- Analisar a possibilidade de coorientação de obras, ou participação em bancas.

A pandemia do Covid-19 inviabilizou a realização presencial do referido Seminário, que ocorreria na cidade de Granada, na Espanha. Contudo, graças aos esforços do grupo espanhol, com destaque para a profa. Carmen Batanero, e do grupo brasileiro, com destaque para o prof. Cassio Cristiano Giordano, entre outros, o evento ocorreu de forma virtual na semana de 18 a 22 de maio de 2020.

Com apoio do Grupo PAI: FQM 126, do Departamento de Didáctica de la Matemática da Facultad de Ciencias de la Educación da Universidad de Granada, foi lançado na Espanha um livro contendo os resumos estendidos dos trabalhos apresentados no Seminário.

Este livro que ora publicamos no Brasil, traz as propostas de pesquisas apresentadas no Seminário aprimoradas pelas discussões realizadas pelos pesquisadores brasileiros e espanhóis, ou seja, apresenta agora um avanço nas investigações, que aqui se apresentam mais objetivas e aprofundadas.

Para organizar os capítulos, fizemos uma divisão de acordo com os principais temas abordados pelos trabalhos, quais sejam: combinatória e probabilidade, ensino médio e superior, formação de professores, livros didáticos e paradidáticos, e gráficos e tabelas

Por fim, nós organizadores gostaríamos de agradecer aos 30 autores brasileiros e 27 espanhóis que foram responsáveis pelo sucesso do evento, o qual representou uma experiência importante para todos, sabendo que a aproximação levada a cabo no Seminário trouxe e trará valorosos ganhos para a Educação Estatística.

Celso Ribeiro Campos
Andréa Pavan Perin

SUMÁRIO

Combinatória e Probabilidade

Pág.

Ensino médio e Superior

Formação de profesores

Livros didáticos e paradidáticos

Gráficos e tabelas

Pesquisas desenvolvidas pelo grupo FORCHILD acerca dos conhecimentos profissionais para o ensino de Probabilidade

Marta Élid Amorim[1], Ruy César Pietropaolo[2], Maria Elisa Esteves Lopes Galvão[2]
[1]Universidade Federal de Sergipe, [2]Universidade Anhanguera de São Paulo

Resumo

Este texto realiza um balanço das pesquisas em formação de professores desenvolvidas no grupo *FORCHILD* nos últimos cinco anos. Focaliza teses defendidas no Projeto *Observatório da Educação* do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo, bem como artigos gerados a partir desses estudos. Por meio de uma metanálise, busca-se analisar os conhecimentos explicitados por professores brasileiros durante sua participação em processos formativos que favoreceram discussões e reflexões coletivas a respeito do ensino e da aprendizagem da Probabilidade. Essas pesquisas mostram que é possível contribuir para o desenvolvimento do conhecimento profissional dos docentes participantes.

Palavras chave: Formação de Professor, Desenvolvimento Profissional, Conhecimento Profissional, Probabilidade, Prática Reflexiva.

1. Introdução

Consideramos ser a Probabilidade uma temática relevante, pois a proposição de seu ensino tem espaço em todas as etapas da Educação Básica nas propostas curriculares recentes de muitos países, como Austrália, Espanha e Nova Zelândia, por exemplo. No Brasil, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) considera-a, junto com a Estatística, um dos eixos organizadores do currículo de Matemática em todos os anos do Ensino Fundamental (Ministério da Educação, 2018). Nesse contexto, embasados em Sacristán (2000), consideramos a importância do professor diante das orientações curriculares. Ele exerce um papel central no ensino, pois é ele que molda, implementa e avalia os efeitos produzidos pelo currículo prescrito.

2. Pesquisas desenvolvidas no grupo *FORCHILD*

As pesquisas aqui apresentadas foram desenvolvidas no grupo *FORCHILD* (Formação de Professores, Currículo e História) e discutiram questões ligadas à formação de professores e à Probabilidade. Neste estudo, destacamos aquelas elaboradas ou orientadas por membros do grupo de pesquisa ligado ao Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN-SP), realizadas no âmbito do Projeto *Observatório da Educação* (OBEDUC)[1]: Grenchi (2016); Felisberto de Carvalho (2017); e Pinheiro (2019). Também frisamos os artigos delas decorrentes:

[1] Projeto Observatório da Educação. Auxílio n.º 1052/2013 D.O. 30/07/2013: *Investigações sobre o Processo de Ensino e de Aprendizagem de Conceitos concernentes à Probabilidade e Estatística*. Coordenado pelo Professor Doutor Ruy César Pietropaolo

Pinheiro, Garcia Silva e Pietropaolo (2018); Felisberto de Carvalho, Pietropaolo e Campos (2018); Pinheiro, Serrazina e Garcia Silva (2019); e Pinheiro, Garcia Silva e Lima (2019). Incluem-se também estudos decorrentes do estágio pós-doutoral feitos a partir de resultados de investigações também desenvolvidas no OBEDUC que além do Relatório das atividades desenvolvidas no pós-doc (Amorim, 2020), também foi divulgada em artigo publicado em periódico (Amorim, Pietropaolo & Garcia Silva, 2020)[2].

As três teses defendidas no âmbito do projeto *OBEDUC* foram desenvolvidas a partir de um processo formativo baseado em uma adaptação das sequências de atividades propostas no programa de ensino de Bryant e Nunes (2012) sobre Probabilidade e Risco. Tal adaptação foi complementada por outras possibilidades vistas na revisão de literatura dos autores.

Grenchi (2016), em sua pesquisa, acompanhou 5 professores do 9º ano do Ensino Fundamental, participantes do curso de formação continuada. O autor analisa, identifica e busca compreender as possíveis contribuições do programa de ensino sobre Probabilidade e Risco para a prática letiva dos professores de Matemática que lecionam essa temática e para seus 319 alunos. Para isso, Grenchi (2016) utiliza pesquisas que discutem a questão didática do ensino da Probabilidade e do Risco como: Bryant, Nunes, Evans e Barros (2012); Piaget e Inhelder (1951); Heitele (1975); Garfield e Ahlgrem (1988); Borovcnik (2008); Batanero (2009); Watson (2003); Ireland e Watson (2009); Gal (2009, 2011); Gigerenzer (2002, 2011); e Gigerenzer e Hoffrage (1995).

O pesquisador entrevistou os cinco professores participantes do processo formativo do OBEDUC. Ele observa que todos eles consideraram importante o letramento probabilístico para a Matemática escolar. Os sujeitos da pesquisa argumentaram que essa é uma das áreas da Matemática que mais se aproxima da realidade e do cotidiano dos alunos, sobretudo para tomadas de decisões com base na Probabilidade. Afirmaram, assim, que o estudo dela evita que as decisões sejam tomadas de forma subjetiva ou baseadas no determinismo.

Quanto ao conhecimento dos professores, Grenchi (2016) nota que eles dominavam a definição de aleatoriedade, espaço amostral e compressão de risco. Todavia, a definição da ideia de comparação de probabilidades já não parecia tão familiar, uma vez que foi verificado que os argumentos apresentados pelos professores se mostraram distantes da concepção desejada para a comparação de probabilidades.

O programa de ensino em Probabilidade propiciou, segundo o autor, mudanças na condução das aulas dos professores investigados. Todos os profissionais foram unânimes em admitir as mudanças e relacioná-las a situações práticas. Esse fato ficou evidente quando, por exemplo, uma das professoras afirmou que o programa de ensino mudou o foco de suas aulas para uma perspectiva mais abrangente, ela passou a valer-se de situações concretas, em vez de apenas pedir para que os alunos resolvessem exercícios matemáticos, ou seja, começou a valorizar mais a prática do que os procedimentos para o cálculo.

[2] Apresenta-se nas Referências apenas os trabalhos consultados e analisados neste capítulo. As referências das pesquisas que foram citadas nas teses e artigos, que configuram o corpus da pesquisa, poderão ser consultadas diretamente nas fontes.

Felisberto de Carvalho (2017) e Pinheiro (2019) desempenharam um duplo papel: o de formadores e o de pesquisadores. Realizaram a formação com o propósito de investigar como o programa sugerido por eles poderia favorecer a construção dos conhecimentos didático-matemáticos sobre Probabilidade e analisar o desenvolvimento profissional dos professores participantes da formação continuada. Pinheiro discute sobre conhecimentos para o ensino de Probabilidade nos anos iniciais do Ensino Fundamental e Felisberto de Carvalho contou com a participação de professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental. Ambos optaram por um caminho no qual aplicaram um questionário inicial para identificar os conhecimentos dos professores investigados para, posteriormente, elaborar o processo formativo, dando ênfase aos aspectos identificados no diagnóstico e incluindo discussões que favorecessem, aos professores, (re)significar concepções equivocadas, ampliar conhecimentos já consolidados e adquirir novos.

Felisberto Carvalho (2017) utiliza: a teoria do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS), proposta por Godino (2002, 2012), Godino, Font, Contreras e Wilhelmi (2006); a teoria do Conhecimento Didático-Matemático do professor (Godino, 2009; Godino & Pino-Fan, 2015), a Engenharia Didática do EOS (Godino, 2012, 2013) e a teoria da Idoneidade Didática (Godino, 2011). A análise do questionário inicial, realizada sob a perspectiva da teoria do Conhecimento Didático-Matemático do professor de Matemática, permite ao pesquisador concluir que os participantes apresentavam lacunas tanto nos conhecimentos sobre o conteúdo quanto em seu ensino comum, avançado e especializado. Observa-se que eles

> possuíam um nível elementar e insuficiente do conhecimento sobre a probabilidade não dominando desta forma os conceitos e noções básicas sobre este objeto epistêmico previsto para o ensino ao nível dos anos finais do Ensino Fundamental que ora atuam como professores. (Felisberto de Carvalho, 2017, p. 323).

No entanto, ao final do curso, que levou em consideração um desenho que articulou a formação matemática e didática, conforme afirma Felisberto de Carvalho (2017), os professores desenvolveram e ampliaram a compreensão de conhecimentos que vão desde a aleatoriedade, incluindo a base conceitual desse objeto, até a quantificação de probabilidades. Além da noção de Risco, saber adquirido pelos docentes durante a formação, abordado por meio da associação entre variáveis em tabela de dupla entrada, os participantes também progrediram em seus conhecimentos para o ensino desse tema para os anos finais do Ensino Fundamental.

A base teórica utilizada na investigação de Pinheiro (2019), no que tange à formação de professores, versa sobre: o Conhecimento Profissional Docente (Ball, Thames & Phelps, 2008; Ball & Bass, 2003); o Desenvolvimento Profissional (Guskey, 2002; Day, 2001); e a Reflexão sobre a prática (Alarcão, 2011; Nóvoa, 2001; Serrazina, 1999; Ponte, 1998; Schön, 1987). Em relação ao conteúdo específico, trata do Letramento em Probabilidade e considera os trabalhos de Gal (2004), Batanero e Godino (2003) e Coutinho (2001) e as concepções de Probabilidade na perspectiva de Batanero e Díaz (2012), Santos (2011), Batanero (2005) e Godino, Batanero e Cañizeras (1996).

Pinheiro (2019), a partir da análise das limitações dos conhecimentos profissionais explicitadas pelas professoras no questionário inicial, sugere uma vivência de propostas de abordagem de conceitos e ideias probabilísticas que passa pelas noções mais simples sobre aleatoriedade, determinação do espaço amostral e alcança a quantificação de probabilidades e o entendimento do Risco — relação entre variáveis. Durante a formação, a autora identifica que as discussões e as reflexões ocorridas possibilitaram a ampliação dos conhecimentos profissionais das docentes, relativos à Matemática, à Probabilidade e a seu ensino. As professoras, de maneira geral, adquiriram compreensões importantes em relação às ideias subjacentes ao conceito de Probabilidade: constataram, por exemplo, que a Probabilidade se relaciona com a incerteza, em acontecimentos de natureza aleatória; entenderam espaços amostrais, formas de descrevê-los e analisá-los; e adquiriram a capacidade de analisar e comparar probabilidades, sobretudo, entre eventos simples.

Um ano e meio após o término da formação, a pesquisadora buscou compreender as implicações do processo formativo no desenvolvimento profissional das participantes a partir de entrevistas e observações de aula de algumas delas. Nesse momento, notou que as discussões provocadas em sessões de formação, bem como as entrevistas, permitiram-na fazer questionamentos constantes, estimulando a reflexão sobre a prática de sala de aula ou a reflexão sobre a ação, na perspectiva de Schön (1987). Isso favoreceu tanto o desenvolvimento profissional como ampliou a base de conhecimentos das participantes para o ensino.

Amorim (2020) realiza sua pesquisa na formação inicial, buscando analisar os conhecimentos de futuros professores de Matemática sobre o ensino da Probabilidade, de forma particular sobre noções de aleatoriedade. Essa investigação envolveu um processo formativo, conduzido pela pesquisadora, no qual foi discutida a questão da independência de eventos a partir dos resultados da pesquisa realizada por Bryant e Nunes (2012). Esse curso contou com a participação de 11 estudantes de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública. Para a elaboração do processo formativo, no que tange às atividades que favoreceram a reflexão do grupo em relação ao ensino, e para a análise dos dados, foram consideradas as categorias discutidas por Shulman (1986, 1987) sobre os conhecimentos do professor. Quanto ao ensino da Probabilidade, a autora utilizou os estudos de Gal (2004) e Batanero, Contrera e Diaz (2011). Sobre a prática reflexiva de professores, usou Zeichner (2003).

A análise mostra que os futuros professores ampliaram a base de conhecimentos para o ensino de Probabilidade, sobretudo em relação ao reconhecimento da necessidade de superação da recência positiva e negativa (Bryant, Nunes, Evans, Gottardis & Terlektsi, 2012) para a compreensão da independência de eventos. Sobre essa concepção, Bryant e Nunes (2012) afirmam: "Um erro comum cometido por adultos e crianças é ignorar a independência de eventos sucessivos em uma situação aleatória" (p. 4). Indicam que entre os adultos predomina a recência negativa, que consiste em acreditar que, "após uma série de resultados, um resultado diferente é mais provável na próxima rodada" (p. 4). Entre as crianças é mais comum relacionar que um evento que aconteceu repetidas vezes é o mais provável de voltar a acontecer — recência positiva.

Além disso, os participantes reconsideraram a posição contrária, demonstrada inicialmente, de incluir o ensino de noções de Probabilidade a partir dos anos iniciais. Dessa forma, a pesquisadora evidencia a importância de ações formativas para propiciar aos licenciandos a vivência em situações de aprendizagem que envolvam conceitos de Probabilidade por meio de experimentações e reflexões.

Amorim (2020) destaca a necessidade de promover nos cursos de formação de professores que ensinarão/ensinam Matemática mais discussões sobre a relevância da aprendizagem de noções concernentes à probabilidade, sobre as dificuldades enfrentadas pelos estudantes e sobre a importância de seu estudo nas diversas etapas da vida escolar. Além disso, promover reflexões sobre metodologias que permitam a (re)significação dos conhecimentos do conteúdo específico, dos pedagógicos do conteúdo e dos curriculares relativos a esse tema.

3. Algumas considerações

As pesquisas aqui analisadas nos fizeram refletir sobre o tipo de formação que um (futuro) professor de Matemática poderia vivenciar para a seleção, a organização e a elaboração de situações que favoreçam a aprendizagem de seus alunos da Educação Básica sobre ideias fundamentais relativas à Probabilidade. Está presente no desenvolvimento dessas investigações a noção de que é necessário, para o professor de Matemática, dominar um repertório abrangente de conhecimentos que lhe permita fazer escolhas para o ensino de conceitos probabilísticos. Consideramos que o pensamento probabilístico deve fazer parte desse repertório do professor, pois constitui um aspecto importante, tendo em vista que pode ser usado como ferramenta eficiente para promover a compreensão da realidade.

Referências

Amorim, M. E. (2020). *Relatório das atividades desenvolvidas no Pós doc*. Trabalho não publicado.

Amorim, M. E., Pietropaolo, R, C., & Garcia Silva, A. da F. (2020). Formação do professor de Matemática: uma discussão sobre o ensino de probabilidade. *Zetetiké*, v. 28, 1-14.

Felisberto de Carvalho, J. I. (2017). *Aprender e Ensinar Probabilidade: um olhar para o conhecimento do profesor* (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo.

Felisberto de Carvalho, J. I., Pietropaolo, R. C., & Campos, T. M. M. (2019). Developing Secondary School Teachers Didactic Mathematical Knowledge about Probability. *Jornal Internacional De Estudos Em Educação Matemática*, *12*, 134.

Grenchi, W. A. (2016). *Contribuições de um programa de ensino para o letramento probabilístico na Educação Básica* (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo.

Pinheiro, M. G. C. (2019). *Ensino de Probabilidade nos Anos Iniciais: um estudo sobre o desenvolvimento profissional do professor* (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo.

Pinheiro, M. G. C., Garcia Silva, A. F., & Lima, R. N. (2019). Conhecimentos de professores sobre probabilidade: interpretação das respostas a uma atividade com eventos independentes. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *32*, 649-646.

Pinheiro, M. G. C., Garcia Silva, A. F., & Pietropaolo, R. C. (2018). Conhecimentos de Professores sobre a Probabilidade. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, *12*, 236-244.

Pinheiro, M. G. C., Serrazina, M. L., & Garcia Silva, A. F. (2019). Desenvolvimento Profissional de uma Professora dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental no Tema Probabilidade. *BOLEMA*, *33*, 1175-1194.

Sacristán, J. G. (2000). *O currículo: uma reflexão sobre a prática.* Porto Alegre: Artmed.

Atitudes em relação à probabilidade de estudantes de cursos interdisciplinares no ensino superior no Brasil e seu desempenho acadêmico

Ailton Paulo de Oliveira Júnior
Universidade Federal do ABC

Resumo

O objetivo deste trabalho é identificar as atitudes de mais de 400 estudantes que fizeram cursos interdisciplinares com conteúdo probabilístico em uma universidade federal do estado de São Paulo, Brasil, e relacioná-las ao desempenho acadêmico. Adaptamos a escala de Elena Auzmendi, considerando atitudes em relação à probabilidade, composta pelos fatores: utilidade; ansiedade; confiança; prazer; e motivação. Descrevemos a relação entre as avaliações aplicadas e os fatores gerados na escala que avalia as atitudes. Alguns dos resultados indicam que os alunos têm atitudes positivas relacionadas à sua utilidade para o mercado de trabalho e que estão significativamente relacionadas aos resultados da disciplina que está associada aos conceitos introdutórios de probabilidade. Esse estudo permitiu um diagnóstico no estabelecimento de estratégias que visam melhorar as atitudes.

Palavras-chave: Atitudes, ensino de probabilidade, educação superior, rendimento acadêmico

1. Introdução

O ensino-aprendizagem de probabilidade ocupa cada vez mais, importante lugar nas instituições de ensino superior devido à atual necessidade de profissionais treinados em lidar com grande quantidade de informações, processadas em tempo mínimo, e com domínio de técnicas de análise de dados que subsidiem a tomada de decisão. Considerando que os cursos introdutórios em probabilidade são talvez a principal contribuição para uma sociedade probabilisticamente alfabetizada, as atitudes dos alunos em relação à probabilidade merecem atenção especial.

Além disso, a medição da avaliação de atitudes são fundamentais para a pesquisa científica e prática educacional, portanto, esforços estão sendo feitos para melhorar as abordagens metodológicas para configurar instrumentos de medição e mais precisos. Um instrumento privilegiado é a escala de medida de atitudes, que determina diferenças ou intensidades em relação a um objeto atitudinal. As atitudes dos alunos podem impedir (ou ajudar) as estatísticas de aprendizagem e podem afetar até que ponto os alunos desenvolverão habilidades de pensamento probabilístico úteis e aplicarão o que aprenderam fora da sala de aula.

Sem esquecer a complementaridade de outras técnicas (Martins, Nascimento & Estrada, 2012), as escalas são procedimentos mais objetivos e, em nosso trabalho, utilizamos uma escala Likert, que fornece pontuação qualificada para uma série de afirmações.

Segundo Oliveira Júnior (2016), parte dos estudos sobre atitudes em relação à probabilidade trata das atitudes dos alunos, especialmente no ensino superior. Essa tendência parece refletir as preocupações dos pesquisadores sobre as atitudes dos alunos e as influências que as atitudes têm em suas vidas.

Portanto, o objetivo deste estudo é investigar a relação entre a atitude e o desempenho acadêmico de alunos de uma disciplina obrigatória do quarto período focada em aspectos introdutórios à probabilidade em uma universidade federal, no estado de São Paulo, Brasil, em 2018.

2. Marco teórico

Para Gal, Ginsburg e Schau (1997), a atitude em relação à estatística e à probabilidade é uma tendência que se forma ao longo do tempo e, como consequência das emoções e sentimentos vivenciados no contexto da aprendizagem, pode ser definida como uma soma de emoções e sentimentos vivenciados durante o período de aprendizagem do sujeito, que se desenvolvem lentamente e nos quais os fatores culturais desempenham um papel importante.

A importância de estudar as atitudes dos alunos em relação à probabilidade reside na teoria de que quando as atitudes em relação a determinado assunto são favoráveis, os sujeitos são motivados a aprender, fazem esforços mais intensos e concentrados, têm ideias claras e estáveis de consolidação e relevância para incorporar o novo material; ao contrário, quando as atitudes são desfavoráveis, os fatores operam na direção oposta (Ausubel, Novak & Hanesian, 1983).

Ruiz de Miguel (2015) considera que as atitudes em relação a estatística e a probabilidade de estudantes universitários variam de acordo com a sua experiência anterior com a matéria. Quanto à relação entre afetividade e desempenho acadêmico, para Bologna e Vaiman (2013), a ansiedade sobre os conteúdos é um dos fatores que mais afetam o desempenho acadêmico. Por outro lado, Estrada (2007) observou que a formação estatística e probabilística é um fator indispensável para melhorar as atitudes.

Carmona (2004) e Estrada, Batanero e Lancaster (2011) indicam estudos que estudam a relação entre atitude e desempenho acadêmico e Dempster e McCorry (2009) observaram que as atitudes no final da instrução eram melhores preditores das notas dos alunos do que suas atitudes iniciais.

Oliveira Júnior, Zamora, Azevedo de Oliveira e Costa de Souza (2018) investigaram a relação entre atitude e desempenho acadêmico de 134 estudantes de três turmas de disciplinas obrigatórias do quarto período, voltadas para conteúdo probabilístico e estatístico utilizando a adaptação da Escala de Auzmendi (1992). Alguns dos resultados indicam que os estudantes não têm confiança na resolução de problemas estatísticos e probabilísticos, observando que não há grande ansiedade sobre estes conteúdos, no entanto, eles não se sentem confiantes em resolver problemas probabilísticos.

3. Método de investigação

Neste trabalho, utilizamos a Escala de Auzmendi (1992) que considera as atitudes em relação à matemática e à estatística, a qual é composta por cinco fatores básicos: (1) Motivação - É o que o aluno sente em relação ao estudo e utilização da probabilidade; (2) Utilidade - É o valor que o aluno dá à probabilidade para sua futura vida profissional; (3) Ansiedade - Refere-se ao medo que o aluno manifesta antes de trabalhar com a probabilidade; (4) Confiança - É o sentimento de confiança que causa a habilidade em relação à probabilidade; (5) Prazer - Refere-se ao prazer causado pelo trabalho probabilístico. A escala foi retirada do original (em espanhol), traduzida e adaptada para o português considerando atitudes em relação à probabilidade.

Destacamos que a escala foi validada por Oliveira Júnior et al. (2018) com 134 alunos de três turmas de disciplinas obrigatórias do quarto período, com foco em conteúdo probabilístico e estatística, em uma universidade federal do estado de São Paulo.

Nesse estudo, o instrumento foi aplicado a 456 alunos que cursavam a disciplina obrigatória no quarto período com foco em conteúdo probabilístico, em uma universidade federal do estado de São Paulo, Brasil, em 2018. A idade dos alunos variou entre 18 e 37 anos. A média de idade foi de 21,17 anos e o desvio padrão de 2,72 anos.

Uma análise fatorial confirmatória foi usada para identificar variáveis representativas de um conjunto maior de variáveis para uso em análises multivariadas subsequentes ou para criar um conjunto inteiramente novo de variáveis para substituir parcial ou completamente o conjunto original de variáveis para inclusão em técnicas posteriores. O objetivo é manter a natureza e o caráter das variáveis originais, reduzindo seu número para simplificar as análises múltiplas que serão utilizadas.

Também utilizamos o alfa de Cronbach que vem “expressar, por meio de um fator, o grau de confiabilidade das respostas decorrentes de uma escala” (Almeida, Santos, & Costa, 2010, p. 2).

Geramos ainda coeficientes de correlação entre as variáveis independentes (desempenho dos alunos nas avaliações aplicadas durante o curso) e a variável dependente (atitudes dos alunos) denominada critério para relacionar as atitudes ao desempenho acadêmico.

4. Resultados

A análise fatorial confirmatória identificou variáveis e apresentamos uma explicação detalhada da identificação dos quatro domínios ou fatores gerados:

1. Não há ansiedade, porém, há falta de confiança na resolução de problemas probabilísticos: não é identificada demasiada ansiedade em relação à probabilidade, porém, há uma perspectiva com a percepção de falta de confiança em relação à capacidade e tranquilidade na execução de problemas probabilísticos.
2. Não é agradável pensar em elementos de Probabilidade apesar de considerar a sua utilidade para o mercado de trabalho: tem conotações negativas no que diz respeito à satisfação no tratamento de questões de Probabilidade e Estatística apesar da consideração de sua utilidade no mercado de trabalho.

3. Falta de motivação e aspectos agradáveis ao pensar no uso da probabilidade no mercado de trabalho: considera-se a produtividade ou benefícios que a probabilidade pode oferecer.
4. A probabilidade é considerada útil para o mercado de trabalho: inclui aspectos da utilidade da probabilidade no mercado de trabalho e com isso há indicação de motivação para frequentar a disciplina.

Neste estudo, o grau de confiabilidade das respostas da escala foi de 0,926, o que confirma a alta consistência interna do instrumento. Os dados contidos no Quadro 1 evidenciam valores do Alpha de Cronbach para os quatro domínios gerados a partir da Análise Fatorial. Segundo Nunnally (1978), pelo menos 0,70 seria um valor de confiabilidade aceitável. Neste estudo, os coeficientes de confiabilidade confirmam a consistência interna do instrumento.

Apoiados em Pasquali (2003), indicamos que, quando o número de itens é pequeno, que é o caso do terceiro ou quarto domínio, este dado deve ser relativizado, visto que neste caso o próprio item em análise afeta substancialmente o escore total a seu favor.

Quadro 1: Coeficiente de Fidedignidade de Cronbach dos domínios da na amostra de treinamento.

Domínios	α de Cronbach	Número de itens
Não há ansiedade, porém, há falta de confiança na resolução de problemas probabilísticos	0,918	10
Não é agradável pensar em elementos probabilísticos apesar de considerar sua utilidade no mercado de trabalho	0,867	7
Falta de motivação e aspectos agradáveis ao pensar no uso da probabilidade no mercado de trabalho	0,678	4
A probabilidade é considerada útil para o mercado de trabalho	0,680	4

Fonte: Elaborado pelos autores após saída do SPSS.

Também usamos os coeficientes de correlação de Pearson que determinam a relação entre as atitudes dos alunos em relação à probabilidade e o desempenho acadêmico durante o curso de conteúdo básico de probabilidade.

Indica-se que a relação da nota final das listas realizadas no decorrer da disciplina e a escala que determina as atitudes em relação à Probabilidade após a aplicação da análise fatorial é de -0,141 ($p < 0,05$), ou seja, é uma relação negativa indicando que conforme a nota das listas aumenta a pontuação na escala de atitudes diminui, convergindo para uma atitude negativa em relação à Probabilidade.

Foram realizadas cinco listas durante o desenvolvimento da disciplina, divididas da seguinte forma: (1) Lista 1 – Combinatória; (2) Lista 2 - Probabilidade Básica; (3) Lista 3 – Condicional e Bayes; (4) Lista 4 - Variáveis Discretas; (5) Lista 5 - Variáveis Contínuas. Os alunos têm sete dias corridos para a solução de cada uma das listas. Cabe destacar que são gerados problemas aleatórios para cada um dos alunos, ou seja, cada aluno recebe questões diferentes, evitando a cópia das soluções. As questões são de múltipla escolha e pede-se que o estudante escolha uma resposta correta em um conjunto de cinco alternativas que são disponibilizadas no ambiente Tidia-Ae. Todo o processo é realizado e acompanhado via online.

O Tidia-Ae é um ambiente colaborativo que gerencia cursos e atividades de aprendizado, dando suporte ao ensino presencial e eletrônico. Reúne ferramentas de software desenvolvidas para ajudar alunos, professores, instrutores e pesquisadores em suas ações. Usando um navegador web, os usuários podem criar um portal que reúna suas necessidades de aprendizado por meio de um conjunto de ferramentas.

Há ainda relações inversamente proporcionais da média geral das listas com o domínio da escala "Não é prazeroso pensar em elementos probabilísticos apesar de considerar sua utilidade ao mercado de trabalho" ($r = -0,153$; $p < 0,01$) e "Falta motivação e aspectos prazerosos ao pensar na utilização da Probabilidade no mercado de trabalho" ($r = -0,200$; $p < 0,01$).

Isto pode indicar que os alunos não consideram que estas listas trazem benefícios para o seu aprendizado já que demanda tempo para a sua resolução. O resultado ainda indica que os alunos não percebem a importância das listas por exigirem uma preparação contínua no desenvolvimento da disciplina. Isso ainda pode ser justificado porque os alunos apresentam falta de confiança ao resolver problemas probabilísticos e não ser prazeroso pensar em elementos da Probabilidade, domínios gerados pela análise fatorial após a aplicação da escala de atitudes.

Ainda destacamos a relação da nota da primeira avaliação da disciplina e o fator "Não há ansiedade, porém apresenta-se falta de confiança ao resolver problemas probabilísticos" é de 0,249 ($p < 0,01$), ou seja, é uma relação positiva indicando que conforme a nota da primeira avalição aumenta a pontuação nesse fator também aumenta, convergindo para uma atitude positiva em relação à Probabilidade, pois não havendo ansiedade, apresenta-se maior possibilidade em que haja melhores resultados.

E ainda pode-se identificar em relação à nota da primeira avaliação que o domínio "Não é prazeroso pensar em elementos da Probabilidade apesar de considerar sua utilidade ao mercado de trabalho" estão diretamente correlacionados ($p < 0,01$). Isto pode indicar que a motivação inicial dos alunos converge para melhores resultados. Destacamos que a primeira avaliação abordou os princípios básicos de análise combinatória e da probabilidade e de variáveis aleatória discreta, após a realização e entrega das três primeiras listas de atividades.

Por fim, quando observamos a nota final da disciplina, observa-se que há uma relação diretamente proporcional tanto com a escala ($r = 0,175$; $p < 0,01$) e com o domínio "Não há ansiedade, porém apresenta-se parcial falta de confiança ao resolver problemas probabilísticos" ($r = 0,182$; $p < 0,01$), indicando que quanto maior é a nota final da disciplina, as atitudes são mais positivas.

5. Conclusões

Destacamos as atitudes dos alunos do bacharelado interdisciplinar que cursam uma disciplina com conteúdo probabilístico, apontando os seguintes aspectos: (1) Não é considerado que as listas de atividades do conteúdo da disciplina trazem benefícios para seu aprendizado; (2) Apresentam motivação quando iniciam o curso e este fato gera melhores resultados na primeira avaliação da disciplina (conceitos básicos da Análise Combinatória e Probabilidade); (3) Quanto melhor é o desempenho no final do curso, mais positiva é a atitude em relação à probabilidade.

Acreditamos que escalas de atitude, como a utilizada em nossa pesquisa, permitem um diagnóstico inicial no estabelecimento de estratégias que visam melhorar atitudes, principalmente as negativas que são detectadas, a fim de melhorar a predisposição dos alunos, como, por exemplo, para exemplo, na percepção.

Além disso, percebemos que os alunos consideram a probabilidade útil no seu dia-a-dia e na sua vida profissional. Por outro lado, não devemos esquecer que essas escalas devem ser instrumentos psicometricamente válidos para obter um diagnóstico válido.

Referências

Almeida, D., Santos, M. C. R., & Costa, A. F. B. Aplicação do coeficiente Alfa de Cronbach nos resultados de um questionário para avaliação de desempenho da saúde pública. *Anais do 30 Encontro Nacional de Engenharia de Produção,* São Carlos, São Paulo.

Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1983). *Psicología Educativa*: un punto de vista cognoscitivo. México: Trillas.

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitarias*. Bilbao: Mensajero.

Bologna, E. L., & Vaiman, M. Actitudes, experiencia previa y nivel de logro en estadística en la carrera de psicología. In J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea, & P. Arteaga (Eds), *Actas da I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 91-103). Universidad de Granada, Granada, Espanha.

Carmona, J. (2004). Una revisión de las evidencias de fiabilidad y validez de los cuestionarios de actitudes y ansiedad hacia la estadística. *Statistics Education Research Journal*, 1(1), 5-28.

Dempster, M., & Mccorry, N. (2009). The role of previous experience and attitudes toward statistics in statistics assessment outcomes among undergraduate psychology students. *Statistics Education Research Journal*, 17(2), 1-7.

Estrada, A. (2007). Actitudes hacia la estadística: un estudio con profesores de educación primaria en formación y en ejercicio. In M. Camacho, P. Flores, & P. Bolea (Eds), *Actas do 11 SEIEM* (pp. 121-140). San Cristóbal de la Laguna, Tenerife, Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Estrada, A., Batanero, C., & Lancaster, S. (2011). Teachers' attitudes towards statistics. In: C. Batanero, G. Burril, G., & C. Reading (Eds), *Teaching statistics in school mathematics.* Challenges for teaching and teacher education (pp. 173-174). Dordrecht: Springer.

Gal, I., Ginsburg, L., Schau, C. (1997). Monitoring Attitudes and Beliefs in Statistics Education In I. Gal, & J. B. Garfield (Eds), *The Assessment Challenge in Statistics Education* (pp. 37-51). The Netherlands: IOS Press.

Martins, J. A., Nascimento, M. M., & Estrada, A. (2012). Looking back over their shoulders: a qualitative analysis of portuguese teachers' attitudes towards statistics. *Statistics Education Research Journal*, 11(2), 26-44.

Oliveira Júnior, A. P. (2016). A Escala de Atitudes em relação ao Ensino de Estatística de professores do Ensino Superior no Brasil. *Educação Matemática Pesquisa*, 18(3), 1449-1463.

Oliveira Júnior, A. P., Zamora, P. R., Azevedo de Oliveira, L., & Costa de Souza, T. (2018). Student´s Attitudes Towards Probability and Statistics and Academic Achievement on Higher Education. *Acta Didactica Napocensia,* 11(2), 43- 56.

Nunnally, J. C. (1978). *Psychometric Theory*. 2nd. ed. New York, N.Y.: McGraw-Hill.

Pasquali, L. (2003). *Psicometria:* Teoria dos testes na Psicologia e educação. Petrópolis: Vozes.

Um caminho para o desenvolvimento da linguagem probabilística nos primeiros anos do ensino fundamental

Fátima Aparecida Kian, Ailton Paulo de Oliveira Júnior, Nilceia Datori Barbosa
Universidade Federal do ABC

Resumo

Segundo a Base Nacional de Currículo Comum - BNCC, no Brasil, a formação de conceitos de natureza probabilística deve ser estimulada desde os primeiros anos do Ensino Fundamental. Portanto, neste estudo iremos descrever e analisar como os elementos linguísticos emergem no processo de ensino e aprendizagem da probabilidade de ensino e aprendizagem, entendido como uma linguagem precisa e especializada. Para isso, faremos um estudo exploratório com alunos do quinto ano do ensino fundamental que tenham recebido algum tipo de instrução prévia sobre o assunto. Através da análise ontosemiótica, procuraremos identificar e explicar a multiplicidade de termos, expressões orais e escritas, símbolos e representações utilizados pelos alunos quando se pretende que esses aprendam o conceito gradualmente e adquiram os conceitos probabilísticos básicos.

Palavras-chave: Ensino de probabilidade, linguagem probabilística, primeiros anos do ensino fundamental, BNCC, análise ontosemiótica

1. Introdução

Godino, Batanero e Cañizares (1996) e Chamorro (2003) afirmam que o desenvolvimento do pensamento probabilístico converge para a presença do brincar na vida das crianças, a variedade de expressões aleatórias que encontramos em nossa linguagem cotidiana (felizmente, sem intenção, etc.), a presença de situações aleatórias no ambiente (clima, apostas, esportes, etc.) e a necessidade de entender o funcionamento do provável, além da visão determinística do pensamento lógico.

Para Vásquez e Alsina (2017), os conceitos de probabilidade são complexos com um alto grau de abstração, por isso é necessário progredir gradativamente em direção a um entendimento adequado da linguagem específica da probabilidade, para aproximar a quantificação da incerteza e, finalmente, para o cálculo das probabilidades no final da escola primária.

Por esta razão, nossa pesquisa é desafiada a avançar em direção a uma compreensão profunda da natureza e características do conhecimento matemático para o ensino de probabilidade na sala de aula do ensino fundamental.

Acreditamos que a probabilidade de aprender desde cedo começa informalmente, introduzindo vocabulário ligado às noções de probabilidade por meio de atividades ou situações-problema focadas nos julgamentos que os alunos fazem a partir de suas próprias experiências.

Portanto, ressaltamos ainda que a linguagem associada ao cotidiano é um elemento fundamental, principalmente nos primeiros níveis de ensino, para incorporar progressivamente uma linguagem probabilística e, portanto, avançar na construção de conhecimentos sobre probabilidade, especialmente se acreditamos que a linguagem matemática pode ser uma barreira para a aprendizagem do aluno devido aos requisitos e convenções específicas necessárias para expressar conceitos matemáticos.

Assim, para dar uma ideia do que acontece dentro da sala de aula quando a probabilidade é ensinada na escola primária, o objetivo desse texto é apresentar atividades que irão descrever e analisar como os elementos linguísticos emergem durante o processo de ensino e aprendizagem da probabilidade em um grupo de alunos de 10 a 11 anos.

2. Marco teórico

É preciso esclarecer que, em relação ao ensino e aprendizagem de probabilidade, é fundamental adotar uma perspectiva de modelagem para que esses significados se complementem, uma vez que uma compreensão adequada do conceito não pode se limitar a apenas um deles (Batanero, Henry & Parzysz, 2005).

Nessa perspectiva, neste trabalho, focamos nossa atenção nos significados intuitivos sobre probabilidade, uma vez que segundo Alsina e Vásquez (2016) são os significados predominantes no ensino fundamental, especialmente nos primeiros níveis de ensino. Consideramos que o significado intuitivo de probabilidade constitui um elemento central e básico nas primeiras idades, uma vez que se refere àqueles termos de uso comum para se referir à incerteza e para expressar quantificação e grau por meio de frases coloquiais e crenças em relação aos eventos.

Vásquez (2014) diz que em razão da ligação entre as expressões probabilísticas referentes ao seu uso comum e propriamente à linguagem probabilística, é que os primeiros elementos linguísticos acabam sendo importante para o estudos probabilísticos, principalmente nos primeiros anos do Ensino Fundamental, sendo essencial que os alunos tenham experiências que os ajudem a apreciar o poder preciso dessa linguagem, evitando que os force prematuramente com a linguagem matemática formal.

Complementando essa ideia, Zieffler e Fry (2015) indicam que, se considerarmos que muitos dos termos e expressões usados para comunicar ideias e conceitos relacionados ao acaso e probabilidade são usados em muitas ocasiões em contextos cotidianos e com um significado, muitas vezes, diferente, pode-se trazer ambiguidades e dificultar o aprendizado, gerando certos vieses probabilísticos associados ao uso incorreto da linguagem.

Os campos de estudo que apoiam teoricamente essa pesquisa são de dois tipos: os significados de probabilidade no currículo do ensino fundamental constantes da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018) e a linguagem probabilística como suporte para o letramento probabilístico.

Batanero, Henry e Parzysz (2005) dizem que, como parte da matemática, a Probabilidade não deixou de apresentar desafios que, em sua busca por responder a situações problemáticas, contribuíram para seu desenvolvimento, estabelecendo o que hoje conhecemos como Teoria da Probabilidade.

Portanto, com base no que foi proposto por Gal (2005) e por Gómez, Ortiz, Batanero e Contreras (2013) é possível distinguir cinco abordagens principais para a aquisição da linguagem probabilística, entendida como uma linguagem especializada para comunicar o acaso, que os alunos precisam desenvolver uma progressão de suas intuições probabilísticas para alcançar uma compreensão adequada da probabilidade, a saber:

1. Linguagem verbal - refere-se à diversidade de termos e expressões verbais;
2. Linguagem numérica - refere-se à quantificação da possibilidade de ocorrência de um determinado evento e à comparação de probabilidades;
3. Linguagem tabular - refere-se ao uso de tabelas para representação de dados. É usado principalmente para a apresentação de frequências relativas e na estimativa de probabilidades a partir deles. Esse tipo de linguagem está fortemente ligado ao significado frequentista de probabilidade;
4. Linguagem gráfica - refere-se à diversidade de representações gráficas ligadas a conceitos probabilísticos e que são utilizadas em estimativas de probabilidade, tais como: pictogramas, diagramas de barras e diagramas de árvores. Esse tipo de linguagem, como a anterior, está ligado ao significado frequentista da probabilidade;
5. Linguagem simbólica - refere-se ao uso de símbolos que podem ser usados para comunicar a probabilidade de ocorrência de um evento, por sua natureza, esse tipo de linguagem é mais frequentemente ligado ao significado clássico e axiomático da probabilidade.

Neste estudo iremos focar nas linguagens que os alunos expressam quando realizarem as atividades contando com o National Council of Teachers of Mathematics - NCTM dos Estados Unidos NCTM (2003), quando considera o papel fundamental no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, especialmente para o caso da probabilidade e seu estudo na infância, devido à estreita relação entre expressões comuns e linguagem matemática ou probabilística.

3. Método de investigação

As atividades curriculares elaboradas pela proposição de problemas têm seu processo de criação considerando os conteúdos propostos na proposta curricular da BNCC para os anos iniciais do Ensino Fundamental, Brasil (2018), de forma a possibilitar aos alunos a compreensão, inicialmente, de conceitos básicos de probabilidade, nesse momento a noção de acaso (Quadro 1).

Quadro 1. Objetivos e Habilidades dos conteúdos probabilísticos propostos na Base Nacional Comum Curricular – BNCC para o 1° ano do Ensino Fundamental.

Objetivos	**Noção de acaso**
Habilidades	Classificar eventos envolvendo o acaso, tais como “acontecerá com certeza”, “talvez aconteça” e “é impossível acontecer”, em situações do cotidiano.

Fonte: Brasil (2018, p. 276-277).

Partimos, portanto, da BNCC para estudar probabilidade nos primeiros anos do ensino fundamental com o objetivo de promover o entendimento de que nem todos os eventos são determinísticos. O trabalho inicial com probabilidade deve centrar-se no desenvolvimento da noção de aleatoriedade, para que os alunos compreendam que existem determinados eventos (impossíveis e possíveis).

Para obter os dados, uma aula de 90 minutos será desenvolvida e filmada com alunos do quinto ano do ensino fundamental (idades de 10 a 11 anos) que tenham recebido instrução prévia em conceitos básicos de probabilidade.

Para descrever e analisar como surgem os primeiros elementos linguísticos, consideramos uma metodologia exploratória que consiste nas seguintes etapas:

1. Identificar e classificar os episódios das aulas (a partir da transcrição), iremos, de acordo com a categorização proposta por Gómez et al. (2013) em que são abordadas situações envolvendo termos, expressões orais e escritas, símbolos e representações (tabelas e gráficos) associados à probabilidade, que constituem as unidades de análise;
2. Codificar os termos, expressões orais e escritas, símbolos e representações associados à probabilidade que são usados para descrever ideias, termos, conceitos ou procedimentos;
3. Por meio da análise ontosemiótica, identificar e explicar a multiplicidade de termos, expressões orais e escritas, símbolos e representações usados quando os alunos devem aprender o conceito gradualmente e adquirir os conceitos probabilísticos básicos.

4. Resultados

Neste texto, apresentamos algumas atividades que visam identificar os elementos linguísticos que emergem no contexto de uma primeira aula de probabilidade com alunos do ensino fundamental que receberam instrução prévia sobre o assunto.

Pretende-se, com o apoio de Vásquez (2018), apresentar um conjunto de situações do quotidiano do aluno em que se pode verificar se existe a possibilidade de o aluno distinguir entre um fenómeno determinístico e um aleatório.

Segundo Batanero (2013), para uma compreensão adequada da probabilidade, é necessário que os alunos sejam capazes de diferenciar entre situações aleatórias e determinísticas, ou seja, que apreciem algumas características básicas da aleatoriedade.

Batanero, Chernoff, Engel, Lee e Sanchez (2016) indicam que para que um cidadão atue efetivamente na sociedade é preciso superar seus pensamentos deterministas e aceitem a existência de que existe o conceito de chance de ocorrência na natureza. É essencial adquirir estratégias e formas de raciocinar que os ajude a tomar decisões adequadas em situações cotidianas onde o acaso está presente.

Propomos algumas situações por meio de cartas nas quais o acaso intervém, ou não, (Figuras 1 e 2), no sentido de que, mesmo que haja alguns padrões de comportamento, é impossível prever com certeza uma situação futura (fenômeno aleatório). Os fenômenos determinísticos que se opõem a fenômenos aleatórios, configura-se em conhecer todos os fatores de um experimento, prevendo, portanto, com precisão o resultado.

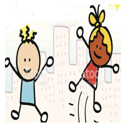
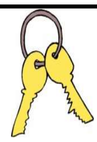
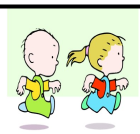
1. Antes de fazer o teste de gravidez, determinar o sexo da criança.	2. Sair na rua e encontrar um amigo da escola.	3. Tirar as chaves do bolso e ela cair no chão.	4. Ganhar uma corrida realizada entre os seus colegas de classe.
			

Figura 1. Situações que se configuram como fenômenos aleatórios
Fonte: Elaborado pelos autores

Batanero (2015) lembra que o conceito de aleatoriedade não é simples e que ao longo da história, teve diferentes significados e está associado a discussões filosóficas. Pode-se encontrar definições diferentes atualmente e na sala de aula geralmente é definida através de algumas propriedades como "imprevisibilidade", "possibilidade de vários resultados", "incontrolável" e mais avançado "com frequência relativa estável em uma longa série de experiências".

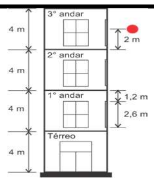
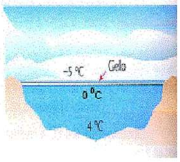
5. Jogar uma bola do topo de um prédio e ela cai no chão.	6. Atingindo temperatura abaixo de zero, congelar a água.	7. Colocar o gelo no sol, no verão, e ele derreter.	8. A água aquecida a 100ºC, sob pressão normal, ferve.
			

Figura 2. Situações que se configuram como fenômenos determinísticos
Fonte: Elaborado pelos autores

Morgado, Pitombeira, Carvalho e Fernandez (2004) reforçam que os fenômenos aleatórios acontecem constantemente em nossa vida diária e o que os diferencia de um experimento determinístico é que os primeiros são experimentos que, repetidos sob as mesmas condições, produzem resultados diferentes, já o segundo é um experimento que, quando repetido em condições semelhantes, conduz a resultados essencialmente idênticos.

Temos por objetivo didático, apoiado em Batanero (2013), que para uma compreensão adequada da probabilidade é necessário que os alunos sejam capazes de diferenciar situações aleatórias e determinísticas, ou seja, apreciar algumas características básicas de aleatoriedade.

5. Conclusões

O estudo em questão sugere que os alunos dos primeiros níveis do Ensino Básico possuem conhecimentos e experiências prévias no contexto do quotidiano que permitem estudar a probabilidade desde a mais tenra idade.

Portanto, é importante que no início do estudo da probabilidade se considere o desenvolvimento das primeiras noções e elementos de aproximação para a aquisição e desenvolvimento da linguagem probabilística.

Referências

Alsina, Á., & Vásquez, C. (2016). La probabilidad en educación primaria. De lo que debería enseñarse a lo que se enseña. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 71, 46-52.

Batanero, C. (2013). La comprensión de la probabilidad en los niños: ¿Qué podemos aprender de la investigación? In: J. A. Fernandes, P. F. Correia, M. H. Martinho, y F. Viseu, (Eds.), *Atas do III Encontro De Probabilidades e Estatística Na Escola* (pp. 1-13). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho. p. 1-13, 2013.

Batanero, C. (2015). *Understanding randomness*: challenges for research and teaching. Proceedings of 9 Conference CERME, Congress of European Research in Mathematics Education, Praga.

Batanero, C., Chernoff, E., Engel, J., Lee, H., & Sanchez, E. (2016). *Research on Teaching and Learning Probability*. ICME – 13 Topical Surveys, Springer International Publishing.

Batanero, C., Henry, M., & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In: JONES, G. (Ed.). *Exploring Probability in School*: challenges for teaching and learning (pp. 15-37). Nueva York: Ed. Springer.

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*: Educação é a base. Ministério da Educação, Brasília. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

Chamorro, M. C. P. (2003). Didáctica de las Matemáticas para Primaria. In: F. Vecino Rubio. *El desarrollo del pensamiento aleatorio en Educación Primaria* (pp. 329-351). Madrid: Pearson.

Gal, I. (2005). Towards 'probability literacy' for all citizens. In: J. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School*: challenges for teaching and learning (pp. 43-71). USA: Kluwer Academic Publisher.

Godino, J. D., Batanero, C., & Cañizares, M. J. (1996). *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis Editorial.

Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C., & Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión*, 35, 75-91.

Morgado, A. C., Pitombeira, J. C, Carvalho, P. C. P., & Fernandez, P. (2004). *Análise combinatória e probabilidade*. Rio de Janeiro: SBM.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2003). *Principios y estándares para la educación matemática.* Traducción de Castellana. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

Vásquez, C. A. O. (2014). *Evaluación de los conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de la probabilidade de los profesores de educación primaria em activo*. Tesis Doctoral em Educación, Programa de Doctorado em Educación, Universitat de Girona, Espanha.

Vásquez, C. A. O. (2018). Surgimiento del lenguaje probabilístico en el aula de educación primaria. *REnCiMa*, 9(2), 374-389.

Vásquez, C. A. O., & Alsina, A. (2017). Lenguaje probabilístico: un camino para el desarrollo de la alfabetización probabilística. Un estudio de caso en el aula de Educación Primaria. *Bolema*, 31(57), 454-478.

Zieffler, A., & Fry, E. (2015). *Reasoning About Uncertainty*: Learning and Teaching Informal Inferential Reasoning Minneapolis. Minnesota: Catalyst Press.

Simulação: A probabilidade frequentista no contexto do jogo *Franc-carreau*

Auriluci de Carvalho Figueiredo

Universidade Metropolitana de Santos; Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Resumo

O presente artigo tem por objetivo discutir aspectos do ensino e a aprendizagem de probabilidade, tendo como contexto a articulação entre os enfoques clássico e frequentista. Para tal, utiliza-se uma ferramenta de simulação computacional construída com o *software* GeoGebra, o jogo *franc-carreau*. Os resultados foram obtidos a partir de atividades propostas a alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, levando-se em consideração o letramento probabilístico e a apreensão ao observarem um gráfico de pontos e linha para estimar a probabilidade de um evento a partir da estabilização das frequências relativas acumuladas desse evento. Dentre as conclusões, podemos constatar que atividade nesse ambiente ofereceu para estes alunos organizar e configurar seus próprios conhecimentos, possibilitando o desenvolvimento de elementos de um modelo de letramento probabilístico.

Palavras-chave: letramento probabilístico; enfoque frequentista; registros de representação.

1. Introdução

A importância de incluir conteúdos relativos à probabilidade está expressa, no Brasil, em documentos oficiais como a Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018), onde se propõe que a partir dos anos finais do Ensino Fundamental, o estudo da probabilidade deve ser ampliado e aprofundado por meio de atividades nas quais os alunos façam experimentos aleatórios e simulações para confrontar os resultados obtidos com a probabilidade clássica com a probabilidade frequentista. Neste documento também consta, em todas as áreas do conhecimento, a indicação do uso e a exploração da tecnologia como recurso para ensino e aprendizagem.

Vários pesquisadores propõem o uso do computador para o ensino e aprendizagem de conceitos que mobilizam probabilidade como meio de entendê-los e minimizar as dificuldades dos alunos diante de situações que envolvem probabilidade e, com isso melhorar habilidades dos alunos (Gürbüz, 2008). Borovcnik e Kapadia (2009) também afirmam que a simulação, quando combinada com o uso da tecnologia, é a estratégia mais apropriada para focar melhor nos conceitos e reduzir a cálculos técnicos.

Com o intuito de unir o ensino da probabilidade à tecnologia e à simulação, propusemos atividades em uma oficina aplicada a alunos da Licenciatura em Matemática com o uso de um *apllet* do GeoGebra que simula o jogo *franc-carreau* (Badizé, Jacques, Petitpas & Pichard, 1996), proposto pelo matemático e naturalista francês George Louis Leclerc (1707 – 1788), Conde de Buffon, que consiste no lançamento de uma moeda sobre um piso de azulejos de forma quadrada. A posição *franc-carreau* ocorre quando a moeda se imobiliza completamente dentro de um único azulejo.

Dos lançamentos consecutivos no jogo constrói-se tabelas com as frequências acumuladas e suas respectivas probabilidades de sair a posição *franc-carreau* nestes lançamentos. O *applet* utilizado está disponível na internet, no próprio site do GeoGebra, de acesso gratuito: https://www.geogebra.org/m/zegKUvqP. Nele é possível tanto a manipulação da "moeda" dentro do "azulejo," como o lançamento dessa "moeda" tantas vezes quantas se queira. Vence o jogo quem obtiver a posição *franc-carreau*, ou seja, a moeda se imobiliza completamente dentro de um único azulejo. A seguir, a Figura 1 apresenta a imagem do jogo após 94 lances, o número de ocorrências de *franc-carreau*, assim como outros dados e comandos que o *apllet* oferece diante das simulações.

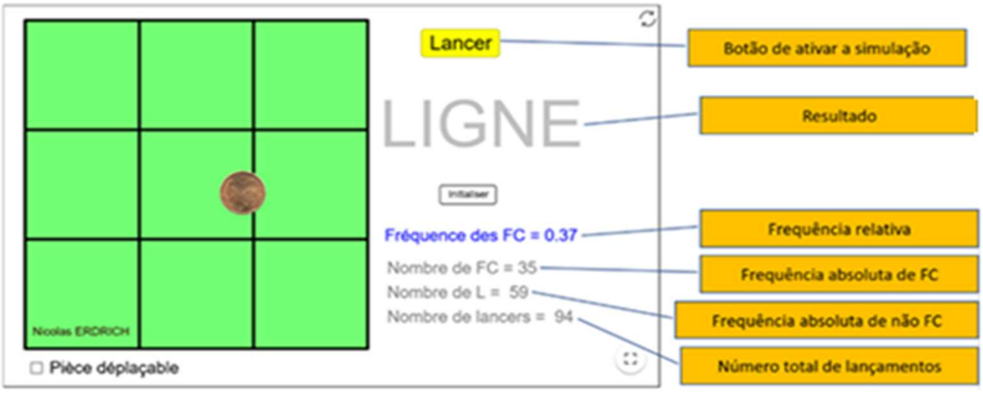


Figura 1: Dados e comandos disponíveis no *applet*.
Fonte: o autor

As dimensões dos quadrados e da moeda são fixas, a figura é composta por 9 quadrados de 5cm e o raio da moeda é de 1 cm.

Os resultados obtidos na oficina nos deu subsídios para levantar considerações sobre o trabalho desenvolvido com futuros professores sobre probabilidade. Com isso, trazemos neste artigo uma discussão sobre aspectos considerados para o ensino e a aprendizagem de probabilidade, a partir dos modelos de letramento probabilísticos, tendo como contexto a articulação entre os enfoques clássico e frequentista.

2. Marco Teórico

Fundamentaremos nosso trabalho sobre o ensino e a aprendizagem da probabilidade na ideia de letramento probabilístico, nos termos propostos por Gal (2005), que é composta por elementos disposicionais e cognitivos. Os elementos disposicionais envolvem crenças, atitudes, hábitos, enquanto os elementos cognitivos vinculam-se a grandes ideias, cálculos probabilísticos, linguagem, contextos e perguntas críticas.

No que se refere aos conteúdos probabilísticos abordados, nos limitaremos àqueles envolvidos diretamente no jogo *franc-carreau,* que envolve cálculo da probabilidade geométrica, aleatoriedade, probabilidade clássica e frequentista, e representação gráfica da estabilização das frequências acumuladas obtidas quando simulamos uma experiência aleatória muitas vezes, com o objetivo de estimar a probabilidade de um evento resultante dessa experiência.

Utilizaremos os Registros de Representação Semiótica (Duval, 1994, 2012) para analisar a articulação de seu uso na representação e manipulação dos objetos probabilísticos que são tratados por simulação computacional e sua representação gráfica. Duval (1994, p.123) afirma que há várias maneiras de apreender uma figura em um contexto geométrico, destacando quatro tipos de diferentes apreensões: a apreensão perceptiva, a apreensão discursiva, a apreensão sequencial e a apreensão operatória. Embora o autor tenha desenvolvido estes estudos em um contexto de Geometria, acreditamos que a representação figural é muito importante na compreensão de conceitos probabilísticos que envolvem a probabilidade frequentista e a sua representação gráfica, e buscaremos compreender as diferentes apreensões no contento de atividades que envolvem simultaneamente simulação computacional no nosso cenário.

3. Metodologia e Cenário

Faremos um estudo de caso – modalidade que visa conhecer uma entidade bem definida em um sistema educativo (Ponte, 2006) – consistindo em uma atividade proposta para oficina aplicada a alunos da Licenciatura em Matemática. Para ele, um estudo de caso favorece "descobrir a que há nela de mais essencial e característico e, desse modo, contribuir para a compreensão global do fenómeno de interesse" (p. 2).

A oficina desenvolvida com alunos da Licenciatura em Matemática ocorreu durante a semana de Tecnologia que acontece nas Instituições de Ensino Superior (IES) no Brasil. Cinco dos sujeitos desta pesquisa cursavam o quarto semestre do curso e os outros quatro o segundo semestre. A oficina ocorreu em um laboratório de informática, no qual cada aluno usava um único computador, mas o comportamento era o de grupo colaborativo: trabalhavam em colaboração mútua durante o desenvolvimento da atividade.

4. Análise e Discussão

Todos os alunos da oficina não conheciam o jogo do *franc-carreau*, mas logo se familiarizaram, e construíram planilhas contendo os resultados da simulação realizada com o *applet* fornecido e construído com o software GeoGebra. A princípio, trabalharam com simulações que se constituíam em 20 lançamentos consecutivos, e depois passam para 50 lançamentos consecutivos computando as frequências acumuladas e as ocorrências do resultado *franc-carreau*.

Até então, estes alunos supunham que deveriam chegar a algum número, mas parece que somente a tabela não respondia algo para eles. Quando passaram para a etapa da construção do gráfico, tomando como referência as frequências acumuladas e o respectivo número de posições *franc-carreau*, estes alunos começaram a discutir também entre eles que existe uma tendência em torno de uma linha do tipo $y = k$, e apontaram a proximidade da probabilidade procurada, o que nos indica que houve apreensão perceptiva no sentido de Duval (2003). Quanto à apreensão discursiva, os alunos começam a discutir sobre questões de aleatoriedade, e a importância para o cálculo de probabilidade no enfoque frequentista com o gráfico de frequências.

A seguir, para elucidar essas ideias da apreensão, apresentamos na figura 2 um gráfico feito no Excel, considerando 40 lançamentos consecutivos e suas frequências acumuladas.

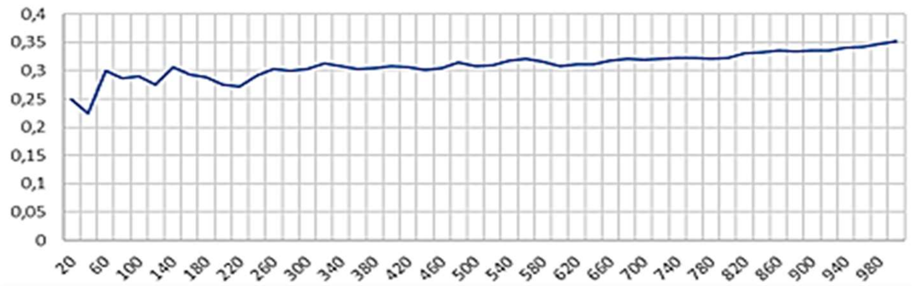


Figura 2. Gráfico com as frequências relativas acumuladas

Fonte: o autor

Após esse momento, os alunos começam a responder a segunda parte da atividade que está indicada na figura 3 a seguir:

b) Analise os itens abaixo:

I) Vocês conseguiram encontrar uma estabilização dessa frequência nos lances de *franc – carreau*? Justifique.

II) Quantas simulações realizaram?

III) Qual a probabilidade de lançar uma moeda e cair em *franc carreau* nesse jogo?

IV) Como poderiam explicar o cálculo dessa Probabilidade pelo enfoque clássico ou frequentista?

V) Se a moeda fosse a nossa de 0,50 centavos de real, ou de 1,00 real qual seria a probabilidade nesses mesmos quadrados de ocorrer o *franc-carreau*?

Figura 3 – Parte da atividade após a simulação no *apllet*

Fonte: o autor

Em conjunto, eles responderam sobre o número de simulações que cada um fez - alguns chegaram a 3 mil lançamentos, e se tinham percebido ou não a estabilização. Quando passaram para o item III), que seria lançar a moeda e encontrar a probabilidade *franc-carreau*, indagaram como conseguiriam encontrar tal probabilidade, isto é, embora percebessem a probabilidade pela frequência das ocorrências, não compreendiam outra forma de encontrar tal probabilidade. Houve interferência de um dos pesquisadores que conduziam o curso nesse momento para uma mudança de cenário, saindo do software e olhando no quadro, um novo quadrado de lado 5 cm e a possibilidade de lançar a moeda nesse quadrado.

Os alunos neste momento mostraram falta de familiaridade com a probabilidade geométrica, pois não concebiam a possibilidade de encontrar a probabilidade sendo os elementos do espaço amostral e do evento, sendo estas variáveis contínuas, e não recorreram à probabilidade clássica para isso, como no caso da relação entre as áreas. O diálogo entre o pesquisador e os alunos fizeram com que eles encontrassem a probabilidade nesse universo de um quadro. A partir desse momento, os próprios alunos conduziram a resposta para P (FC em um quadrado) = $\frac{\acute{a}rea\ do\ quadrado\ menor}{\acute{a}rea\ do\ quadraddo\ maior} = \frac{3^2}{5^2} = \frac{9}{25}$, logo, a probabilidade de encontrar a posição *franc-carreau* em um só quadrado, permanecendo as mesmas medidas, seria 0,36.

Nesse momento conseguiram ampliar os pensamentos e realizaram o cálculo da probabilidade pelo enfoque clássico para os 9 quadrados do *applet* no GeoeGebra. Quanto ao item da atividade "V) Se a moeda fosse a nossa de 0,50 centavos de real, ou de 1,00 real qual seria a probabilidade nesses mesmos quadrados de ocorrer o *franc-carreau*?," os alunos procuraram entre os colegas quem tinha essas moedas de 0,50 centavos e de

1,00 real, mediram o raio da moeda e fizeram os cálculos através da probabilidade clássica, pois percebem a relação entre o raio da moeda e o lado do quadrado para o cálculo da probabilidade. A discussão passou a ser, daí em adiante, sobre as possibilidades de cálculo de probabilidade levando-se em consideração outras medidas de lado de quadrado e raio de moedas, e as condições de existência para a posição *franc-carreau*.

Durante a oficina, observamos algumas discussões dos alunos que evidenciam características do letramento probabilístico descritas por Gal (2005), em relação a:

grandes ideias: podemos destacar que o trabalho com o lançamento da moeda envolveu a variação, aleatoriedade, previsibilidade e incerteza;

cálculo de probabilidades: forma de encontrar a probabilidade geométrica ao utilizar a simulação com o enfoque frequentista, confrontando-o com o enfoque clássico de probabilidade. No enfoque frequentista, através de uma estimativa observada pela apreensão dos gráficos das frequências, e pelo enfoque clássico: $\mathrm{P(FC)} = \frac{9.3^2}{9.5^2} = \frac{9}{25}$; isto é, P(FC) = 0,36;

linguagem: utilização de linguagem acessível, como jogo de moedas, lajotas, rejuntes, imobilização, probabilidades, estabilização de frequências;

contexto: a utilização de contexto de jogos é bastante usual tanto na escola como na vida cotidiana dos alunos e de professores, e foi muito bem aceito e instigante para os alunos desta oficina;

postura crítica: a partir do debate, os alunos puderam assumir uma postura crítica diante de situações de jogos, sabendo distinguir entre o lazer ou não que estes podem oportunizar e, diante destas constatações, puderam levantar possibilidades do mesmo jogo ser utilizado como ferramenta de aprendizado de probabilidade para alunos de diferentes anos da escolaridade básica.

Existem outros pontos que consideramos relevantes que emergiram dos alunos da oficina, como o desconhecimento do cálculo da probabilidade com enfoque frequentista e o da probabilidade geométrica. A assimilação do conhecimento sobre enfoque frequentista emergiu na própria atividade para estes alunos, pois estes alunos tinham bastante familiaridade com a tecnologia. Entretanto, para o cálculo com a probabilidade geométrica, houve necessidade de introduzir o conceito no decorrer da oficina.

5. Considerações finais

O resultado da atividade desenvolvida com nove alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, em laboratório de informática e trabalho em grupo colaborativo foi positivo, pois, além das colocações já apontadas acima, foi possível sair do contexto do uso do computador e trabalhar com o mesmo jogo fazendo outras suposições sobre o tamanho dos quadrados e o raio da moeda, e uma maneira de calcular a probabilidade do f*ranc-carreau* diante de um quadrado de medida l e um raio de moeda r, supondo que a posição *franc-carreau* não ocorra nenhuma vez ou ocorra apenas uma vez.

A figura 4 elucida as conjecturas que estes alunos começam a realizar a partir da procura da posição *franc carreau* em um jogo de lado l e raio r.

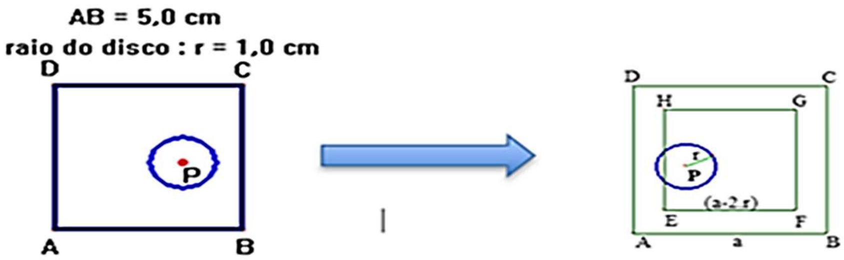


Figura 4 – Busca da generalização a partir de um quadrado
Fonte: o autor

Esta procura de possibilidades de outras medidas de raio da moeda e lado do quadrado levou os alunos a conjecturar sobre como demonstrar a relação encontrada por eles, como, por exemplo, se a prova por indução finita daria conta de tal demonstração, ou se existiria uma outra forma de provar a veracidade de seus achados. Isto nos fez refletir sobre o tempo do minicurso, pois 4 horas para o desenvolvimento de todas as ideias envolvidas na atividade com a simulação do jogo *franc-carreau* nesse *applet* podem não ser suficientes.

Chegamos à conclusão que para desenvolver todas as ideias que surgem com a aplicação desta atividade, há necessidade de um maior tempo para provar as hipóteses levantadas e investigar todas as conjecturas que emergem durante sua aplicação. Portanto, a atividade permitiu ir além do envolvimento dos estudantes com conceitos de probabilidade e geometria, ela também permitiu que, durante o minicurso, os estudantes de licenciatura vislumbrassem a articulação com a unidade álgebra, conforme preconiza a BNCC (2018) para o ensino da matemática.

A realização da atividade nesse ambiente ofereceu aos alunos a oportunidade de organizarem e configurarem seus próprios conhecimentos, avaliarem os conceitos da probabilidade sob diferentes perspectivas, possibilitando o desenvolvimento de elementos do modelo de letramento probabilístico, conforme os termos propostos por Gal (2005).

Referências

Badizé M., Jacques A., Petitpas M. & Pichard J.-F. (1996). *Le jeu du Franc-carreau – une activité probabiliste au Collège*. Rouen: IREM de Rouen.

Borovcnik, M., & Kapadia, R. (2009). Research and developments in probability education. *International Electronic Journal of Mathematics, 4*(3). www.iejme.com/032009/IEJME_p00_introd_E.pdf.

Brasil. (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular: BNCC*. Brasília: MEC.

Duval, Raymond. (1994). Les différents fonctionnements possibles d'une figure une démarche géométrique. *Reperés*, 17, 121-138.

Duval, Raymond. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. *R. Eletr. de Edu. Matem*, *7* (2), 266-297. eISSN 1981-1322. https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465.

Gal, I. (2005). Towards “probability literacy” for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: challenges for teaching and learning* (pp. 39-63). Boston, MA: Springer.

Gürbüz, R. (2008). Olasılık konusunun öğretiminde kullanılabilecek bilgisayar destekli bir materyal [A computer aided material for teaching ‘probability’ topic]. *Mehmet Akif Ersoy University Journal of Faculty of Education, 8*(15), 41-52.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, 105-132. Versão revista e atualizada de um artigo anterior: Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante, 3*(1), 3-18.

Articulando a Estatística e a Probabilidade por meio da curva normal: conhecimentos didáticos-matemáticos de professores do Ensino Médio

José Ivanildo Felisberto de Carvalho[1], André Fellipe Queiroz Araújo[2]
[1]Universidade Federal de Pernambuco, [2]Secretaria Educação de Pernambuco

Resumo

A presente pesquisa teve como objetivo investigar uma proposta de ensino para a abordagem articulada entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal com 12 professores de Matemática do Ensino Médio, vinculados a rede estadual de educação de Pernambuco. Para isso, este estudo está fundamentado no modelo teórico de Conhecimentos e Competências Didático-Matemáticos do professor – CCDM, desenvolvido no âmbito do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática – EOS. Concluímos que os professores conseguiram avançar na construção, ressignificação e ampliação de seus conhecimentos sobre articulação entre a Estatística e a Probabilidade, na perspectiva Matemática e didática.

Palavras-chave: Educação estatística, conhecimentos didáticos-matemáticos, formação de professores, enfoque ontossemiótico.

1. Introdução

Neste resumo apresentamos um estudo que propõe a abordagem da Curva Normal como uma das possibilidades para o ensino e aprendizagem da Estatística e da Probabilidade na etapa de escolaridade do Ensino Médio. A Base Nacional Comum Curricular (2018), principal documento orientador para o ensino no Brasil, propõem que os conceitos de estatística e probabilidade devem ser iniciados já nos primeiros anos do Ensino Fundamental, e, em seguida, aprimorado e ampliado no Ensino Médio.

Na literatura há diversos estudos (Santana, 2016; Batanero & Díaz, 2012) que apontam lacunas nos conhecimentos docentes para o ensino da estatística e da probabilidade. De modo geral, esses estudos apontam que o ensino de Estatística ainda está pautado, por muitos docentes, em uma abordagem tradicional, não promovendo, por exemplo, a articulação com a probabilidade, sendo essas duas áreas ensinadas de forma separada e independente.

Diante desse cenário, acreditamos que é oportuna a realização de investigações que tratem dos conhecimentos de professores relativos ao campo estatístico e probabilístico, considerando que os mesmos exercem um papel primordial no processo de ensino e aprendizagem da Matemática, sendo os principais responsáveis por apresentar o conhecimento matemático, e que suas ações determinam, em grande medida, os resultados desse processo.

Nessa direção, focamos no conceito da Curva Normal, por considerá-lo o principal modelo de análise de dados presente na Inferência Estatística (Batanero, Tauber, & Sánchez, 2004), e por acreditar que seu processo de ensino e aprendizagem possibilita a abordagem da inter-relação entre a Estatística e a Probabilidade, áreas que, como visto, comumente são ensinadas na Educação Básica de forma totalmente independente.

No que diz respeito a estudos sobre o processo de ensino e aprendizagem da Curva Normal, destacamos que a investigação realizada por Tauber (2001) aponta que o ensino da Curva Normal deve ser iniciado já na Educação Básica, cuja relevância na Estatística se deve ao fato de que muitos fenômenos físicos, biológicos e sociológicos do nosso cotidiano podem ser modelados através da Curva Normal; grande parte das variáveis aleatórias encontra-se distribuídas em uma distribuição normal, e que permite o uso em qualquer área do conhecimento que muitos métodos estatísticos exigem a condição de normalidade para sua correta aplicação.

Outros estudos (Bansilal, 2014; Macedo, 2016; Monroy & Herrera, 2019), realizados com diferentes métodos e públicos, apresentam resultados semelhantes, tais como, dificuldades de professores e futuros professores em não possuir domínio conceitual sobre a Curva Normal e, além disso, dificuldades no reconhecimento da probabilidade associada à área intervalos sob a Curva. Diante disso, o presente estudo buscou responder as seguintes problemáticas: Quais os conhecimentos didático-matemáticos de professores de Matemática do Ensino Médio concernentes ao Conceito da Curva Normal e aos conceitos estatísticos e probabilísticos que estão presentes nesse modelo? Como uma proposta de ensino, desenvolvida através de um encontro formativo, favorece a construção/ampliação dos conhecimentos didático-matemáticos de professores de Matemática do Ensino médio sobre a abordagem articulada da Estatística com a Probabilidade por meio da Curva Normal?

2. Marco Teórico e Método

A pesquisa utiliza como marco teórico o modelo de Conhecimentos e Competências Didático-Matemático do professor – CCDM (Pino-Fan & Godino, 2015; Godino, Batanero, Font, & Giacomone, 2016) que está embasado na Teoria do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática - EOS. A partir desse modelo, os autores advogam que para o professor de Matemática possa exercer a função docente, faz-se necessário o domínio de conhecimentos e competências que englobam tanto o conhecimento matemático, como também o conhecimento sobre o ensino da Matemática.

A presente pesquisa foi realizada com 12 professores de matemática do Ensino Médio que atuam na rede pública de ensino do estado de Pernambuco, localizado na região nordeste do Brasil. A escolha por professores desse nível de escolarização se deve ao fato de o estudo da Curva Normal, através do ensino da Estatística e da Probabilidade, ser apresentado e recomendado para essa etapa de ensino, a partir das diretrizes veiculadas pela Base Nacional Comum Curricular (BRASIL, 2018), constituída como o principal documento norteador da educação no Brasil, e mais especificamente, pelos Parâmetros para a Educação Básica do Estado de Pernambuco (PERNAMBUCO, 2013). Essa pesquisa se dividiu em duas etapas: um estudo diagnóstico e a construção e vivência de um encontro formativo com os referidos professores.

O estudo diagnóstico foi realizado por meio de um questionário composto por 6 questões que envolveram 8 itens relativos aos conhecimentos didático-matemáticos para a articulação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal. Como critério de análise foi instituído três categorias para as respostas: Adequadas, Parcialmente Adequadas e Inadequadas. Para a fase formativa organizamos um encontro com quatro sessões, que permeavam a realização de três atividades, a discussão coletiva de cada atividade e uma sistematização teórica sobre o tema. As duas fases desse estudo levaram em consideração as ferramentas teóricas sobre o conhecimento matemático e didático do professor. Neste texto apresentaremos de forma geral as conclusões concernentes às duas fases deste estudo.

3. Resultados e Discussão

No estudo diagnóstico, os dados demonstram que há uma predominância no desempenho dos professores de respostas do tipo Parcialmente Adequada (RPA) e do tipo Inadequada (RI). O gráfico, a seguir, apresenta a frequência das categorias por questão.

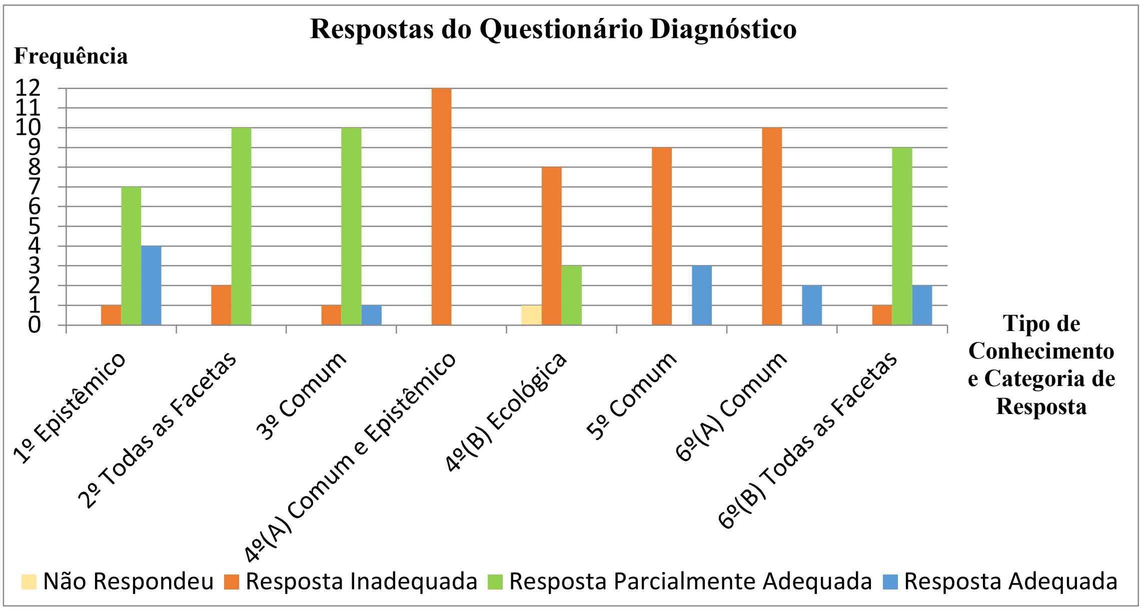


Figura 1: Gráfico da categorização das respostas ao questionário diagnóstico
Fonte: Dados da pesquisa

Diante desses dados, chamamos atenção para o fato de que das quatro questões com maior frequência de respostas inadequadas três delas envolveram o conhecimento comum do conteúdo. Na questão 4(A), por exemplo, na qual indagamos aos professores o modo como eles conceituavam a Curva Normal, constatamos que todos eles apresentaram respostas inadequadas. Nessa questão, 8 professores, em suas respostas, se limitaram a informar que não sabem ou não conhecem o referido conceito e apenas 4 professores buscaram, mesmo que sem êxito, apresentar uma conceitualização para a Curva Normal.

Verificamos ainda que a maioria dos professores demonstrou não conhecer a relação teórica entre a Estatística e a Probabilidade, os conceitos de Amostragem, Amplitude, Desvio Padrão e o conceito da Curva Normal. Por vez, percebemos que o conceito de média, como medida de tendência central, demonstrou ser aquele que os professores mais conhecem e dominam, enquanto conhecimento matemático comum.

Além disso, os professores evidenciaram algumas noções de conhecimento didático envolvendo as facetas Cognitiva, Afetiva, Mediacional e Interacional quando indagados sobre o procedimento de discussão com a classe de alunos a partir das respostas apresentas pelos grupos de estudantes (respostas fictícias) a uma situação-problema envolvendo a Curva Normal. Entretanto, em linhas gerais, a análise realizada na primeira etapa da pesquisa indicou, veementemente, que a maioria dos professores não tinha domínio conceitual e não estavam habituados, em sala de aula, a ensinar a estatística articulada com a probabilidade, e, em particular, a Estatística Inferencial, bem como o conceito da Curva Normal, contemplando os conceitos estatísticos e probabilísticos presentes nesse modelo.

Em linhas gerais, a análise realizada na primeira etapa da pesquisa indicou, veementemente, que a maioria dos professores não tinha domínio conceitual e não era habituada, em sala de aula, a ensinar a Estatística articulada com a Probabilidade, e, em particular, a Estatística Inferencial, bem como o conceito da Curva Normal, contemplando os conceitos estatísticos e probabilísticos presentes nesse modelo. Diante disso, realizamos a segunda etapa da pesquisa, o Encontro Formativo que foi desenvolvido em um único encontro dividido em quatro momentos, no qual contamos com a participação de sete dos 12 professores.

No primeiro momento, as respostas apresentadas e as discussões realizadas entre os professores participantes evidenciaram que os mesmos estavam habituados, em sala de aula, a abordar a Estatística totalmente independente da probabilidade, com foco apenas nas medidas de tendência e na aplicação das fórmulas e técnicas operatórias. Assim, eles refletiram na necessidade de também compreender e abordar as medidas de dispersão relacionadas com as de centralidade, os significados desses conceitos inseridos em diferentes contextos e como se dá a relação entre a Estatística e a Probabilidade, refletindo sobre o conhecimento matemático Comum de alguns conceitos estatísticos e probabilísticos que estão presentes no modelo da Curval Normal.

No segundo momento, realizamos a abordagem da sistematização teórica sobre a articulação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal e as possibilidades didáticas para o seu processo de ensino e aprendizagem no Ensino Médio. Logo, esse momento envolveu o estudo sobre a Estatística enquanto ciência, contemplando a área descritiva e Inferencial, sua relação com a Probabilidade, o conceito da Curva Normal e sua representação gráfica, as propriedades, conceitos estatísticos e probabilísticos presentes nesse modelo e o cálculo de probabilidades associado à área sob a Curva. Por fim, abordamos e discutimos sobre o ensino da Curva Normal no Ensino Médio, o que contemplou o conhecimento sobre as orientações curriculares para o tema, recursos didáticos, atividades e interações que podem ser adotadas em sala de aula.

O resultado do terceiro momento foi observado a partir das respostas apresentadas na segunda atividade que envolveu a resolução de situações-problemas sobre a Curva Normal, análise didática de uma resposta de um estudante a uma situação problema semelhante e a formulação de uma proposta de aula sobre esse tema. A partir desses dados, observamos que os professores demonstraram compreender e se apropriar do conhecimento matemático Comum e do conhecimento Epistêmico sobre o conceito da Curva Normal. Além disso, verificamos que os professores também avançaram na construção e ampliação dos conhecimentos didáticos envolvendo todas as seis facetas, ao levantarem e compreenderem as possibilidades didáticas para o ensino da relação entre a Estatística e a Probabilidade através da Curva Normal no Ensino Médio, o que contemplou o conhecimento sobre o currículo proposto sobre o tema para esta etapa de ensino, recursos didáticos e atividades que podem ser utilizados para a abordagem do mesmo.

No quarto e último momento, os professores expressaram suas opiniões sobre as contribuições da proposta de ensino abordada. Assim, na perspectiva do conhecimento matemático, os professores apontaram que o estudo desenvolvido propiciou o entendimento da relação entre Estatística e a Probabilidade, por meio da Estatística Inferencial, contemplando importantes conceitos, até então pouco conhecidos, como a Amostragem e Amostra. Além disso, destacaram a construção do conhecimento matemático sobre a Curva Normal. Com a relação ao conhecimento didático, os professores destacaram que o estudo proporcionou o entendimento de novas possibilidades didáticas para o ensino da Curva Normal no Ensino Médio, abarcando a compreensão de aspectos didáticos relacionados ao currículo de Matemática para a referida etapa de ensino, dos recursos didáticos que podem ser utilizados para robustecer a prática docente e as diferentes maneiras de interagir e abordar essa temática com os estudantes em sala de aula.

4. Considerações Finais

Diante do exposto, concluímos que através da realização pesquisa, os professores participantes conseguiram avançar na construção, ressignificação e ampliação de seus conhecimentos didático-matemáticos sobre a articulação entre a Estatística e a Probabilidade por meio da Curva Normal. Acreditamos ainda que os resultados aqui observados possam promover novas discussões e reflexões sobre o ensino da Estatística e da Probabilidade, ampliando a base de conhecimentos de professores de Matemática do Ensino Médio relativa ao campo Estatístico e Probabilístico, como também favorecer a qualidade das ações docente em sala de aula, potencializando as tarefas didático-pedagógicas e de aprendizagem, em favor do letramento estatístico e probabilístico dos estudantes.

Referências

BRASIL, Ministério da Educação e da Secretaria de Educação, *Base Nacional Curricular Comum*, 2018. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/> Acesso em: 27 de Dezembro de 2019.

BANSILAL, S. (2014). *Using an APOS framework to understand teachers' responses to questions on the normal distribution*. Statistics Education Research Journal, 13 (2), 42-57

BATANERO, C., TAUBER, L. y SÁNCHEZ, V. (2004). *Students' reasoning about the normal distribution*. En D. Ben-Zvi and J. Garfield (Eds.), The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking, (pp. 257–276).

BATANERO, C.; DÍAZ, C. Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics*, Granada-ESP, v.3, n.1, p.3-13, Abril, 2012.

CARVALHO, J. I. F. *Um estudo sobre os conhecimentos didáticos-matemáticos de probabilidade com professores de matemática dos anos finais do ensino fundamental.* Tese de doutorado em Educação Matemática, faculdade Anhanguera de São Paulo, 2017.

GODINO, J. D. *Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en didáctica de la matemática*. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XVI (pp. 49 - 68). Jaén: SEIEM. 2012.

GODINO, J D., BATANERO, C., FONT, V. y GIACOMONE, B. (2016). *Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM*. Investigación en Educación Matemática XX (pp. 285-294). Málaga: SEIEM, 2016.

GODINO, J. D.; GIACOMONE, B.; BATANERO, C.; FONT, V**.** *Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas.* Bolema, Rio Claro (SP), v. 31, n. 57, p. 90 - 113, abr. 2017.

GONÇALVES, P. *Uma abordagem da distribuição normal através da resolução de uma situação problema com a utilização do software geogebra*. 102f. Dissertação (Mestrado em Matemática)-Universidade Federal de Goiás, 2014.

MACEDO, R. C. *Conhecimentos de professores de matemática sobre o processo de ensino e de aprendizagem de noções estatísticas– curva normal*. 206f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática)- Universidade Anhanguera de São Paulo, 2016.

PINO-FAN, L. e GODINO, J. D. *Perspectiva ampliada Del conocimiento didáctico-matemático Del profesor*. Paradigma, 36 (1), 87-109. 2015.

SANTANA, M. S. *Traduzindo Pensamento e Letramento Estatístico em Atividades para Sala de Aula: construção de um produto educacional,* Bolema, Rio Claro (SP), v. 30, n. 56, p. 1165 - 1187, dez. 2016.

SILVA, C. R. *Da teoria à prática: uma proposta pedagógica para o ensino da estatística nos anos finais do ensino fundamental*, trabalho de conclusão de curso, Universidade Federal do Rio Grande – FURG, Rio Grande, 2015.

TAUBER, L. *La Construccióndel Significado de La Distribución Normal a partir de Actividades de Análisis de Datos*. 2001. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Departamento de Didáctica de las Matemáticas da Universidad de Servilla, Servilla, 2001.

VALDEZ MONROY, J. C. y SALINAS HERRERA, J. (2019). *Análisis de las respuestas de estudiantes de bachillerato a problemas sobre la distribución normal*. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López- Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.

Pesquisas Brasileiras Sobre Combinatória: uma investigação em periódicos na última década

Antonio Carlos de Souza[1], Cristiane de Arimatéa Rocha[2]
[1]Universidade Estadual Paulista, [2] Universidade Federal de Pernambuco

Resumo

A discussão desse capítulo apresenta um recorte de uma investigação que teve por objetivo analisar as pesquisas brasileiras sobre Educação Estatística publicadas nos periódicos nos últimos 10 anos. Nessa perspectiva, foram selecionados artigos que discutiram Combinatória nos periódicos, classificados com Qualis A1 a B2 indicados na plataforma Sucupira da Capes, no período de 2010 a 2019. Foram contabilizados 46 trabalhos que versam direta ou indiretamente sobre Combinatória. Constatamos que a ênfase dos trabalhos tratava dos conhecimentos de alunos sobre Combinatória e o nível de escolarização mais apresentado nessas pesquisas foram os anos iniciais do Ensino Fundamental como também o Ensino Médio.

Palavras-chave: Combinatória, Raciocínio combinatório.

1. Introdução

A resolução de problemas combinatórios pode proporcionar “um excelente meio para que os estudantes realizem atividades de matematização, dar significado a outras ferramentas conceituais básicas e relacionar entre si variados ramos da matemática” (Godino & Batanero, 2016, p.8). Este tipo de problema pode ser utilizado como construtor profícuo de habilidades matemáticas como generalização por não exigirem amplo conhecimento matemático e ao mesmo tempo serem desafiadores (Reed & Lockwood, 2018; Kapur, 1970).

Vários autores, em diferentes países, a exemplo, nos Estados Unidos, Kenney e Hirsch (1991), English (2005), na Espanha, Batanero, Godino e Navarro-Pelayo (1996), Godino e Batanero (2016), no Brasil, Borba (2010, 2016), Souza (2013), defendem a inclusão da Combinatória no currículo desde os primeiros anos da Educação Básica. Defendemos ainda que as práticas docentes sejam efetivadas nos diferentes níveis de escolarização, mas para que isso ocorra as discussões trazidas nas pesquisas necessitam alcançar as diferentes modalidades e etapas da Educação Básica e na formação inicial e continuada do professor. Desse modo, a presente pesquisa visa apresentar pontualmente o que está sendo discutido nas pesquisas brasileiras sobre Combinatória publicadas nos periódicos nos últimos 10 anos.

Na próxima seção sintetiza-se uma discussão sobre Combinatória e sua relevância em pesquisas nacionais e internacionais. Na seção 3 são apresentados os procedimentos metodológicos da pesquisa. Na seção 4 são discutidos os critérios adotados para análise e os principais resultados da pesquisa. Por fim, a seção Considerações tece algumas reflexões.

2. Combinatória um campo propício para novas aprendizagens em Matemática

Desde tempos antigos que problemas combinatórios preocupam diferentes culturas no mundo (Batanero et al, 1996). Knuth (2013) apresenta um percurso histórico da Combinatória que conduz a uma série de enumerações sistemáticas, existentes em fontes históricas de civilizações chinesas, indianas, gregas, entre outras. A enumeração de possibilidades se fez presente nas mais diversas áreas, seja por meio de listas de notas musicais, ou da organização de previsões de oráculos, ou ainda na composição de códigos ou linguagens.

Tal procedimento de enumeração relacionado aos problemas combinatórios com menor número de possibilidades, quando sistemático, permite que alunos produzam o esgotamento das possibilidades e a depender dos professores, a valorização das habilidades de estratégias pessoais de resolução desses tipos de problemas.

Nos documentos curriculares oficiais brasileiros, em especial, a Base Nacional Comum Curricular – BNCC, o trabalho com Combinatória é indicado a partir do 4º ano do Ensino Fundamental (equivalente a crianças de 9 anos) visando o desenvolvimento da "capacidade de enumeração do espaço amostral", o que de certa forma, valoriza a relação existente entre Combinatória e Probabilidade (Brasil, 2017, p.274).

Lopes e Coutinho (2009) entendem o desenvolvimento do raciocínio combinatório como uma forma de pensar importante na vida das pessoas. Tais autoras justificam a relevância pois esse desenvolvimento proporciona a análise de situações de decisão, nas quais é preciso elaborar métodos para saber a quantidade total de possibilidades, sem ter que enumerá-las uma a uma.

A articulação da Combinatória com as diferentes áreas e a disponibilidade de atividades que introduzam e discutam diferentes métodos de contagem, inclusive os enumerativos podem ser campos propícios para que alunos dos diferentes níveis de escolarização apresentem novas aprendizagens.

3. Procedimentos metodológicos

No presente estudo realizamos uma revisão sistemática que consistiu em uma busca planejada criteriosa com uma pergunta definida, com estratégias e critérios para selecionar, avaliar e analisar criticamente os dados dos trabalhos encontrados (Sampaio & Mancini, 2007; Rother, 2007).

Definimos o período de 2010 a 2019 para busca, e selecionamos os artigos de periódicos brasileiros que abordaram Combinatória. O ponto inicial da pesquisa foram 42 periódicos da área de ensino da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior (Capes) que possuem em seu escopo a publicação de trabalhos relacionados à Matemática. Tal número foi obtido nos periódicos que possuem Qualis A1, A2, B1 e B2 no quadriênio 2013-2016, a partir do parâmetro na Plataforma Sucupira da Capes.

Delimitado os periódicos, iniciamos as explorações nos repositórios ou indexadores dos periódicos elegidos utilizando as seguintes palavras-chave: combinatória, combinatório, estocástica, probabilístico. Todas seguidas do termo or (ou) para que qualquer artigo que contivesse ao menos uma das palavras-chaves fosse exibido como resultado de busca e foram encontrados 104 trabalhos. Nem todos os periódicos tinham artigos que continham as palavras-chaves utilizadas.

Foram encontrados 15 periódicos que apresentaram artigos relacionados a Combinatória, os quais encontram-se distribuídos da seguinte forma: 3 artigos em periódicos publicados no estrato A1, 25 artigos em periódicos A2, 15 artigos em periódicos B1 e 3 artigos em periódicos B2, conforme apresentado na Tabela 1.

Tabela 1: Classificação dos periódicos e frequência dos artigos

Nome do periódico	**Qualis**	**Frequência**
Bolema	A1	1
Educar em Revista	A1	2
Acta Scientiae	A2	1
Alexandria	A2	1
Educação Matemática Pesquisa	A2	11
Educação Matemática em Revista	A2	1
Revista de Ensino de Ciências e Matemática	A2	2
Zetetiké	A2	2
Revista Eletrônica de Educação Matemática (REVEMAT)	A2	3
Revista Eletrônica de Educação (REVEDUC)	A2	3
AMAZÔNIA	A2	1
BOEM	B1	2
Em Teia	B1	11
Perspectivas da Educação Matemática	B1	2
Caminhos da Educação Matemática em Revista	B2	3

Fonte: Elaborado pelos autores

Após a seleção dos 46 artigos, foi realizada a leitura de seus respectivos resumos com o objetivo de identificar quais mencionavam a temática relacionada à Combinatória. A Tabela 2 apresenta a quantidade de trabalhos de acordo com as temáticas explicitadas.

Tabela 2: Classificação dos artigos

Temática	Quantidade
Combinatória	12
Estocástica	5
Combinatória, Estatística e Probabilidade	4
Raciocínio combinatório	16
Probabilidade e Combinatória	1
Análise Combinatória	8

Fonte: Elaborado pelos autores

A seguir apresentamos os critérios utilizados para a análise dos artigos selecionados.

4. Critérios de análise e discussão dos resultados

Para a análise dos trabalhos, consideramos categorias definidas por Souza, Lopes e Souza (2015), sendo elas: estudo de observação direta (23 trabalhos); estudo de observação participante (9); e estudo teórico (14).

Para um aprofundamento nas discussões dos estudos, adotamos outros critérios de análise, como por exemplo, *o alcance da Combinatória estudada nos diferentes níveis de escolarização*: Educação Básica (Educação Infantil, anos iniciais do Ensino Fundamental, anos finais do EF e Ensino Médio) e Ensino Superior; e *abrangência do* *foco da pesquisa em Combinatória*: formação de professores (inicial e/ou continuada), análise de recursos (livros didáticos, jogos, objetos de aprendizagem), conhecimentos de alunos, processos de ensino e aprendizagem, análise de documentos curriculares (estaduais e nacionais) e revisão de literatura.

Constatamos que os trabalhos analisados com relação ao *alcance da Combinatória estudada nos diferentes níveis de escolarização* versam sobre todas as etapas escolares, inclusive modalidades do ensino como a Educação de Jovens e Adultos (3), no entanto, a maioria dos artigos abordam a Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental (14), seguido por aqueles com foco no Ensino Médio (12). Para os anos finais do Ensino Fundamental foram encontradas (3) pesquisas isoladas e (3) no Ensino Fundamental (anos iniciais e finais) que abordavam diferentes aspectos do ensino dessa temática nesse nível, seja análise de livros didáticos, documentos curriculares ou conhecimentos de Combinatória apresentados por estudantes. A Educação Infantil (2) e o Ensino Superior (2) foram as que tiveram menor número de trabalhos com relação a Combinatória. As demais pesquisas tratavam da Educação Básica em geral sem especificar. Também não foram observadas discussões da Combinatória que abordem esse conteúdo na perspectiva da Educação Inclusiva ou da Educação Especial.

Verificamos ainda a *abrangência do foco da pesquisa em Combinatória* no Brasil que discute sobre diversos aspectos do ensino e aprendizagem, no entanto, grande parte dessas pesquisas investigam os conhecimentos sobre problemas combinatórios de estudantes dos diferentes níveis (17). Além dessas, foram identificadas pesquisas que abordaram investigações com professores (8), revisão de literatura (8), análise de documentos curriculares (6), análise de recursos (6) e uma pesquisa que investiga o processo de ensino e aprendizagem de Combinatória.

Quanto as pesquisas de/com professores, cinco delas trabalharam com professores já formados na busca de concepções ou conhecimentos sobre Combinatória e as demais centraram-se na formação inicial, especificamente na resolução de questionários de Combinatória por licenciandos em Matemática.

Com relação as pesquisas sobre os documentos curriculares nacionais discutiram sobre a abrangência da Combinatória, a relação existente entre Combinatória e Probabilidade, e a abrangência da Estocástica nesses documentos, para as diferentes etapas e modalidades de ensino. Houve uma pesquisa que analisou os problemas combinatórios descritos na proposta do Currículo do Estado de São Paulo.

Nas investigações categorizadas por análise de recursos, três analisaram livros didáticos de diferentes níveis demonstrando a importância desse recurso para o estudo de Combinatória. As demais pesquisas abordaram o uso em sala de aula de recursos como o jogo corrida de cavalo ou os objetos de aprendizagem virtuais que utilizam essa temática. Observamos apenas uma pesquisa que investiga o processo de ensino e aprendizagem da Combinatória em sala de aula o que denota a necessidade de mais pesquisas que focalizem os diferentes aspectos e dimensões que emergem da abordagem da Combinatória nas distintas etapas de ensino.

5. Considerações Finais

O alcance apresentado no nível de escolarização dos trabalhos brasileiros sobre Combinatória é uma evidencia da versatilidade dessa temática, o que reforça que com as devidas adequações pode e deve ser ensinada nas diferentes etapas e modalidades de ensino, em particular, na Educação Infantil (Souza & Lopes, 2012; Lopes, 2012; Borba, 2016).

Com relação a abrangência do foco da pesquisa em Combinatória identificamos um número considerável de pesquisas brasileiras que discutem os conhecimentos de combinatória de estudantes. Todavia, entendemos que há necessidade de mais investigações sobre a formação de professores tanto inicial quanto continuada que promovam discussões sobre aspectos conceituais e práticos para o ensino de Combinatória, visto que professores ainda necessitam de melhor embasamento que contribuam para as tomadas de atitudes em sala de aula.

Referências

Batanero, C.; Godino, J. & Navarro-Pelayo, V. (1996). *Razonamiento Combinatorio*. Madrid: Síntesis.

Borba, R. (2010). O raciocínio combinatório na educação básica. *Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador, BA, Brasil, 10.

Borba, R. (2016). Antes que seja tarde: Aprendendo Combinatória desde o início da escolarização. *Em Teia.* 7(1), 1-17.

Brasil. (2017). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: Ministério da Educação.

Godino, J. & Batanero, C. (2016). Implicaciones de las relaciones entre epistemologia e instrucción matemática para el desarrollo curricular: el caso de la Combinatoria. La matematica e la sua didattica, 24(1-2), 17-39.

Hart, E. & Sandeful, J. (2018). *Teaching and learning Discrete Mathematics Worldwide:* curriculum and research. Springer.

Lopes, C. E. & Coutinho, C. Q. S. (2009). Leitura e escrita em educação estatística. In C. E. Lopes & A. M. Nacarato (Org.). *Educação matemática, leitura e escrita:* armadilhas, utopias e realidade. Campinas: Mercado de Letras.

Lopes, C. E. (2012). A educação estocástica na infância. *Reveduc*. 6, 160-174. Recuperado de http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/396/179. doi: 10.14244/19827199396.

Kapur, J. N. (1970) Combinatorial Analysis and school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. D. Reidel Publishing Company: Dordrecht-Holland, 3. 111-127.

Kenney, M. J. & Hirsch, C. R. (1991) *Discrete Mathematics across the curriculum, K-12.* Reston, VA: National Council of teachers of Mathematics.

Knuth, D. E. (2013). Two Thousand Years of combinatorics. In R. Wilson & J.J.Watkin. *Combinatorics*: ancient e modern. (p. 2-38). United Kingdon: Oxford University Press.

Reed, Z. & Lockwood, E. (2018) Generalizing in Combinatorics Through Categorization. *CRUME-Conf. Research in Undergraduate Maths Education*, San Diego, CA.,1-10.

Rother, E. T. (2007). Revisão sistemática X revisão narrativa. *Acta paulista de enfermagem*. 20(2), v-vi. Recuperado de https://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-21002007000200001&lng=pt&tlng=pt doi:10.1590/S0103-21002007000200001.

Sampaio, R. F. & Mancini, M. C. (2007). Estudos de Revisão Sistemática: um guia para síntese criteriosa da evidência científica. *Revista Brasileira de Fisioterapia*. São Carlos, 11(1), 83-89.

Souza, A. C. & Lopes, C. E. (2012). Combinando roupas e vestindo bonecos: ideias de Combinatória no desenvolvimento profissional de uma educadora da infância. *REVEDUC*. 6, 148-159. Recuperado de http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/view/404. doi: 10.14244/19827199404.

Souza, A. C. (2013). *O desenvolvimento profissional de educadoras da infância:* uma aproximação à educação estatística. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática)–Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo, SP, Brasil.

Souza, L. O.; Lopes, C. A. E. & Souza, A. C. (2015). Os delineamentos metodológicos nas investigações brasileiras em Educação Estatística. *Perspectivas da Educação Matemática*, 8, 506-525. Recuperado de https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/1461/968.

Let it be? No! Midiendo actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza

Assumpta Estrada[1], Maria M. Nascimento[2], Maria Ricart[1], J. Alexandre Martins[3],

[1]Universidad Lleida, España [2]Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Portugal, [3]Instituto Politécnico da Guarda, Portugal

Resumen

En la educación escolar la Probabilidad es un componente importante en el que los profesores tienen un rol fundamental. Por ello la medición de las actitudes hacia dicha materia es importante en el colectivo de profesores de Educación Primaria. El objetivo de esta comunicación es describir la Escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza (EAPE - Estrada y Batanero, 2015) construida específicamente para docentes y futuros docentes, así como presentar los resultados obtenidos con futuros profesores de educación primaria en España y Chile. Se complementará aportando la versión en portugués de Brasil de la escala.

Palabras clave: Actitudes, Probabilidad, Formación de profesores.

1. Introducción

La probabilidad forma parte del currículo desde la Educación Primaria para ayudar a los niños a enfrentar la gran cantidad de información de naturaleza probabilística que se maneja en nuestro día a día. En España y otros países se incluyen contenidos sobre el lenguaje del azar, la comparación de probabilidades, la observación de experimentos aleatorios y recogida de datos sobre los mismos.

Desafortunadamente, aún que esté incluida de forma oficial en el currículo, es la probabilidad algo bastante olvidado en la clase de matemáticas, debido a falta de tiempo o de formación docente sobre esta materia o la actitud del profesorado hacia la misma (Batanero, Ortiz y Serrano, 2007). Esto se explica porque, hasta muy recientemente, no se contemplaba la probabilidad como parte de la formación de los futuros maestros, situación común en otros países. Por ello, es necesario reforzar la formación de los profesores responsables de introducir el conocimiento probabilístico en las escuelas y desarrollarlo (Azacárate y Cardeñoso, 2008).

Simultáneamente es importante valorar y reforzar la componente emocional en la formación de estos profesores, pues si un profesor no valora un tema, le parece que no está preparado para impartirlo o le disgusta, difícilmente logrará un aprendizaje efectivo por parte de los alumnos (Batanero y Díaz, 2012). Las actitudes forman parte del dominio emocional, junto con las emociones y creencias, que se diferencian por la estabilidad de la respuesta afectiva que representan, por el grado en que la cognición interviene en su formación, así como el tiempo que tardan en desarrollarse (Gómez-Chacón, 2016). En consecuencia, la evaluación de las actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza de profesores y futuros profesores es un primer paso para organizar acciones educativas pertinentes.

El objetivo de este trabajo es presentar la escala EAPE, (Estrada y Batanero, 2015) construida específicamente para docentes y futuros docentes. Se complementará presentando resultados obtenidos con profesores de educación primaria en España (Estrada, Batanero y Diaz, 2018) y en Chile (Alvarado, Andaur, y Estrada, 2018) así como su versión en portugués.

2. La Escala de Actitudes hacia la Probabilidad y su Enseñanza, EAPE

Al ser la probabilidad un tema nuevo en la educación primaria, la medición de las actitudes del profesorado es imprescindible para organizar acciones formativas. Pero en la actualidad hay numerosas escalas de medición de actitudes y varias específicas hacia la estadística, pero ninguna para medir las actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza dirigida al profesorado.

En Estrada y Batanero, (2015), se describe de forma precisa y detallada la construcción de la Escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza (EAPE), obteniéndose un modelo multidimensional en el que las actitudes se estructuran en componentes relacionados con la probabilidad y otros relacionados con su enseñanza y que presentamos a continuación:

- Componente afectivo hacia la probabilidad, AP. Valora los sentimientos personales del sujeto hacia la Probabilidad, como: agrado-desagrado hacia esta materia, miedo-confianza al iniciar su estudio o al resolver problemas, interés-desinterés por el tema; sentimientos positivos o negativos hacia la Probabilidad. Este componente ha sido considerado también en las escalas de actitudes hacia la estadística.
- Competencia cognitiva apreciada hacia la probabilidad, CCP. Valora la percepción de la propia capacidad, conocimientos y habilidades intelectuales en Probabilidad. También, presente en las escalas de actitudes hacia la estadística, a pesar de que una materia guste a un sujeto, es posible que la encuentre difícil o piense que tiene poca capacidad para la misma. Será importante que un profesor tenga una buena percepción de su propia capacidad para formarse en una materia determinada.
- Componente comportamental hacia la probabilidad, CP. Evalúa la tendencia a utilizar la probabilidad, a la toma de decisiones, la ayuda a otros compañeros, el uso que se hace de la Probabilidad.
- Componente afectivo hacia la enseñanza de la probabilidad, AE. Valora los sentimientos personales hacia la enseñanza de la Probabilidad, que pueden variar (aunque estarán relacionados) con el componente afectivo hacia el tema. Este componente intenta medir el agrado-desagrado, miedo-confianza interés-desinterés por enseñar probabilidad.
- Componente de competencia didáctica hacia la enseñanza de la probabilidad, CDE. Evalúa la percepción de la propia capacidad para enseñarla, resolver dificultades de los estudiantes, proponer buenas tareas, buscar recursos, etc. Un profesor puede pensar que tiene facilidad para aprender un tema, no obstante, puede sentirse capacitado o no para enseñarlo.
- Componente comportamental hacia la enseñanza de la probabilidad, CE. Valora la tendencia a la acción didáctica: si el profesor trata o ha tratado o no de enseñar

Probabilidad, si le da prioridad sobre otros temas, si piensa que debería posponerse en general.

- Componente de valor hacia la probabilidad y su enseñanza, VPE. Se intenta evaluar el valor, utilidad y relevancia que el profesor concede a la probabilidad en la vida personal y profesional y a la formación del alumno en este tema, es decir a la inclusión de la enseñanza de la probabilidad en el currículo.

La escala está compuesta por 28 ítems, distribuidos equitativamente por componentes, 14 con enunciados en positivos y 14 en negativos para solucionar los problemas de aquiescencia (tabla de la Figura 1).

Cuanto a las componentes de las actitudes evaluadas en la EAPE podemos relacionarlas con los ítems tal como se presenta en la tabla de la Figura 2.

	España		Chile	
	Media	Desv. Típica	Media	Desv. Típica
1. Me divierto en las clases en las que se explica probabilidad	3.04	0.80	3.93	0.82
2. Utilizo información sobre probabilidad a la hora de tomar decisiones	3.17	0.95	3.42	1.00
3. Será difícil para mí enseñar probabilidad	3.29	0.98	3.65	1.17
4. La probabilidad ayuda a entender el mundo de hoy	3.55	0.94	4.06	0.83
5. Me gusta la probabilidad; es un tema que siempre me ha interesado	2.91	0.92	3.79	0.91
6. La probabilidad es fácil	2.87	0.94	2.98	1.10
7. Nunca he usado la probabilidad fuera de las matemáticas	3.73	1.04	3.81	1.11
8. Domino los principales contenidos de probabilidad	2.69	0.96	3.91	0.90
9. Pienso que me gustará enseñar probabilidad en la escuela	3.31	0.90	4.07	1.09
10. Creo que sabré detectar y corregir errores y dificultades de los alumnos con la probabilidad	3.32	0.84	3.79	0.85
11. Sólo enseñaré probabilidad si me queda tiempo después de los otros temas	4.13	0.90	4.03	1.03
12. La probabilidad sólo sirve para los juegos de azar	4.41	0.75	4.26	0.98
13. La probabilidad no tiene tanto valor como otras ramas de las matemáticas	4.09	0.90	3.83	1.15
14. Me resultará fácil diseñar actividades de evaluación de la probabilidad	2.68	0.70	3.26	1.00
15. Uso la probabilidad en la vida cotidiana	3.36	0.93	3.84	0.98
16. Me siento intimidado ante datos probabilísticos	3.53	0.99	3.54	1.15
17. La probabilidad sólo la entienden la gente de ciencias	4.26	0.90	4.34	0.91
18. Evito leer las informaciones donde aparecen términos de probabilidad (en prospectos de medicamentos, etc.)	3.99	1.00	4.14	1.05
19. Los conocimientos sobre probabilidad, ayudan a los alumnos a razonar críticamente	3.73	0.76	4.12	0.78
20. Se debería enseñar probabilidad en los primeros niveles de enseñanza	3.48	0.95	4.14	1.01
21. Me preocupa saber responder preguntas de probabilidad de los alumnos	3.07	0.96	4.17	0.92
22. No me siento preparado para resolver cualquier problema básico de probabilidad	3.35	0.99	3.75	1.18
23. Pienso que no seré capaz de preparar recursos didácticos apropiados para la clase de probabilidad	3.67	0.91	3.94	1.03
24. Cuando sea pertinente, utilizaré la probabilidad en otras materias que enseño	3.48	0.83	3.95	0.74
25. Si pudiera eliminar alguna materia, sería la probabilidad	4.40	0.90	4.36	1.02
26. No tengo mucho interés en enseñar probabilidad aunque aparezca en el curriculum	4.19	0.89	4.14	1.08
27. No me agrada resolver problemas de probabilidad	3.75	1.04	3.89	1.11
28. Como profesor creo que me sentiré cómodo al enseñar probabilidad	3.47	0.87	3.90	0.95

Figura 1. Media y desviaciones típicas de los ítems de la EAPE en España y Chile

Fuente: hecho por los autores

Componente	Ítem cuestionario
Afectivo hacia la probabilidad	1 - 7 – 11 – 20
De competencia cognitiva hacia la probabilidad	6 – 8 – 17 – 19
Comportamental hacia la probabilidad	5 – 14 – 24 – 25
Afectivo hacia la enseñanza de la probabilidad	9 – 12 – 15 – 18
De competencia didáctica hacia la enseñanza de la probabilidad	16 – 26 – 27 – 28
Comportamental hacia la enseñanza de la probabilidad	10 – 13 – 22 – 23
De valor hacia la probabilidad y su enseñanza	2 – 3 – 4 – 21

Figura 2. Componentes de las actitudes evaluadas en la EAPE

Fuente: Alvarado, Andaur y Estrada (2018)

3. Análisis de resultados de evaluación de actitudes.

Se presentan en la tabla 1 los resultados obtenidos en la aplicación de la escala con 232 futuros maestros españoles y 70 profesores de matemática en ejercicio y 51 profesores en formación de educación media chilenos.

Los ítems con los puntajes más altos (más de 4 puntos en promedio y puntajes muy similares en las dos muestras, amarillo Figura 1) fueron el ítem 12 (la probabilidad es útil en situaciones además de los juegos de azar), ítem 25 (intención de enseñar probabilidad) y el ítem 17 (la probabilidad es comprensible). Restan los ítems 11 (enseñar probabilidad si queda tiempo después de los otros temas) y 26 (sin interés en enseñar probabilidad, aunque aparezca en el *curriculum*).

Los ítems con los puntajes más bajos (puntajes por debajo de 3 puntos, verde Figura 1) fueron el ítem 6 (la probabilidad es fácil), y ítem 14 para las dos muestras (facilidad para preparar materiales didácticos). Además, y ambos solo para los españoles el ítem 8 (he dominado el contenido de probabilidad) y el ítem 5 (le gusta la probabilidad y es un tema que siempre le ha interesado).

4. Conclusiones

A la vista de los resultados obtenidos en los ítems podemos concluir que la actitud es positiva, tanto en los profesores españoles, como en los chilenos, aunque es levemente mejor en profesores chilenos en ejercicio y con experiencia docente. Los futuros maestros en el estudio perciben la utilidad de la probabilidad (en media) y están dispuestos a enseñarla, pero no se sienten lo suficientemente preparados en el contenido matemático o pedagógico para hacerlo.

Por otro lado, en nuestro estudio de los ítems de la escala hacia la probabilidad y su enseñanza, queda en evidencia que el profesorado, aunque tendrá que dar prioridad a la probabilidad sobre otros temas (e.g. ítem 25), dar más valor a la utilidad (e.g. ítem 7) y mejorar la relevancia de la probabilidad en la vida personal (e.g. ítems 2, 18) y profesional (e.g. ítem 8).

Como trabajo futuro dejaremos un análisis más detallada de las componentes presentadas para las muestras de los países.

5. Trabajos y cooperaciones futuras no ámbito de aplicación de la escala EAPEP

A la vista de los resultados obtenidos y de otros trabajos ya hechos (Estrada, Bazán & Aparicio, 2010; Martins, Estrada & Nascimento, 2012; Martins, 2015) sería de interés hacer comparaciones recorriendo a la aplicación de esta escala en otros países. Este interés, por ventura, daría más fuerza a recomendaciones que los estadísticos y los educadores matemáticos y estadísticos presentasen a las autoridades de la enseñanza de los varios países.

Así esta escala ja tiene traducida una versión en portugués de Brasil que pasamos a presentar.

La EAPEP recoge los datos de los respondientes a respecto de aspectos que ayudarán el análisis (variables escolares y personales). Cuál es el nombre de la institución de educación superior; Género; Edad; Como ha accedido a la educación superior (Escuela secundaria; Educación complementaria; u Otros). Además, se cuestiona: ¿Cuándo fue la última vez que estudió la probabilidad? E, por fin, cual es el nivel que frecuenta: Bachillerato; Bachillerato Medio; Formación profesional; Grado; u Otros. Recogidos los datos de los respondientes se presenta la indicación de que enseguida viene una serie de afirmaciones sobre probabilidad y enseñanza que se presentan en la EAPEP. Así, el respondiente debe indicar el nivel de acuerdo o desacuerdo sobre las 28 afirmaciones presentadas. Ponga una X en el cuadro correspondiente según la categoría: 1. En desacuerdo 2. En desacuerdo 3. Indiferente 4. De acuerdo con 5. Totalmente de acuerdo.

Esto es presentado en la versión en portugués de Brasil en la Figura 3.

Escala atitudes em relação a probabilidade e ao ensino para professores (EAPEP)

- Instituição do ensino superior: ______________________
- Gênero: ☐ Feminino ☐ Masculino - Idade: ________ anos
- Acesso ao ensino superior:
  ☐ Ensino Médio ☐ Ensino Supletivo ☐ Outros: ______________
- Quando você estudou pela última vez probabilidade?
  ☐ Ensino Fundamental ☐ Ensino Médio ☐ Formação profissional ☐ Licenciatura
  ☐ Outros: ______________

Em seguida, vem uma série de declarações sobre probabilidade e ensino. Você deve indicar o nível de concordância ou discordância nas 28 afirmações apresentadas. Coloque um X na caixa apropriada de acordo com a categoria:

1. Discordo 2. Discordo 3. Indiferente 4. De acordo com 5. Concordo plenamente

Figura 3. Caracterización inicial y presentación de la escala EAPEP
Fuente: hecho por los autores

Por fin, las afirmaciones en la versión en portugués de Brasil de la escala EAPEP en la Figura 4.

		1	2	3	4	5
1.	Divirto-me nas aulas em que me ensinam probabilidade					
2.	Utilizo informações sobre probabilidade na hora de tomar decisões					
3.	Para mim vai ser difícil ensinar probabilidade					
4.	A probabilidade ajuda a entender o mundo de hoje					
5.	Eu gosto da probabilidade; é um tema que sempre me interessou					
6.	A probabilidade é fácil					
7.	Eu nunca usei probabilidade fora do ensino da matemática					
8.	Domino os principais conteúdos de probabilidade					
9.	Penso que gostarei de ensinar probabilidade na escola					
10.	Creio que poderei detectar e corrigir erros e dificuldades dos alunos em probabilidade					
11.	Só ensinarei probabilidade, se tiver tempo depois de outros conteúdos					
12.	A probabilidade só serve para jogos de azar					
13.	A probabilidade não tem tanta importância como outros ramos da matemática					
14.	Acho que será fácil projetar atividades de avaliação de probabilidade					
15.	Eu uso probabilidade na vida cotidiana					
16.	Sinto-me intimidado perante dados probabilísticos					
17.	Probabilidade só é compreendida apenas por pessoas das ciências					
18.	Eu evito ler as informações em que surgem termos de probabilidade (em folhetos de medicamentos, etc.)					
19.	O conhecimento de probabilidade, ajuda os alunos a pensar criticamente					
20.	A probabilidade dever ser ensinada nos primeiros níveis de ensino					
21.	Preocupa-me não saber responder a perguntas de probabilidade dos alunos					
22.	Não me sinto preparado para resolver nenhum problema básico de probabilidade					
23.	Penso que não serei capaz de preparar conteúdo de ensino adequado para as aulas de probabilidade					
24.	Quando for pertinente, usarei a probabilidade em outros tópicos de matemática que ensino					
25.	Se eu pudesse eliminar algum tópico da matemática, seria a probabilidade					
26.	Não tenho muito interesse em ensinar probabilidade, embora ela apareça no currículo					
27.	Não me agrada resolver problemas de probabilidade					
28.	Como professor, acho que me sinto confortável para ensinar probabilidade					

Figura 4. Afirmaciones de la escala EAPEP

Fuente: hecho por los autores

Referencias

Alvarado, H., Andaur, G., & Estrada, A. (2018) Actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza: Un estudio exploratorio con profesores de matemática en formación y en ejercicio de Chile. 005089-*Revista Paradigma*, *39*(2), 36-64.

Azacárate, P., & Cardeñoso, J. M. (2008). Probabilidad. E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en Educación Primaria* (pp. 591-620). Madrid: Síntesis.

Batanero, C., Ortiz, J.J., & Serrano, L. (2007). Investigación en didáctica de la probabilidad. *UNO - Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *44*, 7-16.

Batanero, C., & Díaz, C. (2012). Training teachers to teach probability: Reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics*, *3*(1), 3-13.

Estrada, A., & Batanero. C. (2015). Construcción de la escala de actitudes hacia la probabilidad y su enseñanza para profesores. C. Fernandez, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 239-248). Alicante: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Estrada, A., Batanero, C., & Díaz, C. (2018). Exploring Teachers' Attitudes Towards Probability and Its Teaching. C. Batanero & E. Chernoff, (Eds.), *Teaching and Learning Stochastics: Advances in Probability Education Research* (pp. 313-332). Berlin: Springer.

Estrada, A., Bazán, J., & Aparicio, A. (2010). Un estudio comparado de las actitudes hacia la estadística en profesores españoles y peruanos. *Union*, 24.

Disponible en: http://www.fisem.org/paginas/union/info.php?id=96

Gómez-Chacón, I. (2016). Métodos empíricos para la determinación de estructuras de cognición y afecto en matemáticas. A. Berciano et al. (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 93-114). Malaga: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Martins, J. A., Nascimento, M. M., & Estrada Roca, M. A. (2012). Looking back over their shoulders: a qualitative analysis of Portuguese teachers' attitudes towards statistics. *Statistics Education Research Journal, 11*(2), 26-44.

Martins, J. A. (2015). *Estudo das atitudes em relação à Estatística dos professores do 1º ciclo e dos professores de Matemática do 2º ciclo do ensino básico.* (Tese de Doutoramento de Didática de Ciências e Tecnologias da Universidade Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real, Portugal).

Propuestas de aplicación de indicadores de idoneidad didáctica en probabilidad y estadística: análisis de vídeos educativos

Pablo Beltrán-Pellicer[1], Belén Giacomone[2], Nuria Begué[1]

[1]Universidad de Zaragoza, [2]Universidad de San Marino

Resumen

La idoneidad didáctica es una herramienta teórica nacida en el seno del enfoque ontosemiótico (EOS) que proporciona un marco para la reflexión de procesos de enseñanza y aprendizaje de educación matemática. De esta manera, han ido surgiendo trabajos de investigación sobre diseño de actividades, análisis de experiencias de aula o análisis de recursos didácticos, entre otros. Muchos de estos resultados se centran en el ámbito de la formación de profesores. En esta comunicación, los autores esbozamos el punto de partida de algunas líneas de trabajo que pueden realizarse en el ámbito de la didáctica de la probabilidad y la estadística, como el análisis de vídeos en línea de contenidos específicos.

Palabras clave: idoneidad didáctica, probabilidad, formación de profesores, recursos didácticos.

1. Introducción

La Teoría de la Idoneidad Didáctica (TID) (Godino, 2013; Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006) es una herramienta surgida en el seno del Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007) que proporciona un andamiaje para la reflexión en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas.

En la TID se proponen seis facetas para el análisis de los procesos instruccionales, identificando, para cada faceta, criterios de idoneidad generales (Godino, 2013), de aplicación a cualquier contenido matemático. De esta manera, es posible elaborar una guía general de indicadores de idoneidad (GVID) para cada contenido, que puede servir como instrumento de ayuda para el profesor, tanto en el diseño como en la implementación y evaluación de procesos de enseñanza y aprendizaje. Para elaborar estas GVID se debe llevar a cabo una revisión de los resultados de investigación sobre la didáctica de cada uno de estos contenidos específicos, lo cual permite concretar los criterios generales en unos criterios específicos (Alsina y Domingo, 2010; Arguedas-Matarrita, Concari y Giacomone, 2017; Aroza, Beltrán-Pellicer y Godino, 2017; Blanco-Álvarez, Fernández-Oliveras y Oliveras, 2017; Breda, Font y Pino-Fan, L.R., 2018; Cruz, Gea y Giacomone, 2017; Robles, Tellechea y Font, 2014; Vasconcelos y Carvalho, 2019).

2. Propuesta y método de investigación

Como resultado de la investigación realizada en Beltrán-Pellicer, Godino y Giacomone (2018) se obtuvo una propuesta de indicadores de idoneidad didáctica para procesos de enseñanza y aprendizaje de la probabilidad, para cada una de sus seis facetas. Un ejemplo de ello son los indicadores correspondientes a la faceta epistémica, que se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1. Indicadores específicos para la idoneidad epistémica en probabilidad.

Componentes	*Indicadores*
Situaciones-problema	1) Se plantean situaciones-problema que muestran y relacionan los diferentes significados de la probabilidad (informal, subjetiva, frecuencial y clásica). 2) Se propone una muestra representativa de experiencias aleatorias, reales o virtuales, distinguiéndolas de experiencias deterministas. Por ejemplo: lanzamientos de dados o monedas, simulaciones de concursos o bingos etc. 3) Se propone una muestra representativa de contextos donde ejercitar y aplicar los contenidos tratados. 4) Se proponen situaciones de generación de problemas sobre fenómenos aleatorios (problematización) por los propios estudiantes.
Lenguajes	1) Se emplean diferentes registros y representaciones para describir experiencias aleatorias (verbal, diagrama de árbol, tablas, simbólica, conjuntos etc.), señalando las relaciones entre las mismas. 2) Se utiliza un nivel lingüístico adecuado al alumnado al que se dirige, en cuanto a construcciones gramaticales y vocabulario. 3) Se emplean términos precisos, como suceso, espacio muestral, frecuencia relativa, aleatorio, determinista, casos favorables, casos totales, resultado de un experimento, sucesos simples y sucesos compuestos. 4) Se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación de fenómenos aleatorios, en los diferentes registros mencionados.
Reglas (definiciones, proposiciones, procedimientos)	1) Las definiciones y procedimientos se formulan con claridad y corrección, adaptados al nivel educativo al que se dirigen. 2) Se presentan las definiciones de fenómeno aleatorio, fenómeno determinista, espacio muestral, suceso, suceso elemental, suceso compuesto y probabilidad. 3) Se presentan proposiciones en torno a las definiciones, como la probabilidad del suceso imposible, del suceso seguro y del complementario; propiedades de las frecuencias relativas 4) Estabilidad de las frecuencias relativas como base para estimar la probabilidad. 5) Se presentan los procedimientos de cálculo de probabilidades mediante la regla de Laplace y el empleo de tablas y diagramas de árbol. 6) Se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones, proposiciones o procedimientos.
Argumentos	1) Las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo al que se dirigen. 2) Se usan simulaciones para mostrar la estabilidad de las frecuencias relativas. 3) Se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.
Relaciones	1) Los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones etc.) se relacionan y conectan entre sí. 2) Se identifican y articulan los diversos significados de la probabilidad (uso informal, subjetivo, frecuencial y clásico).

Fuente: Fuente: Beltrán-Pellicer, Godino y Giacomone (2018).

Este tipo de indicadores específicos se ha aplicado en la evaluación de vídeos en línea sobre contenidos concretos, como la proporcionalidad (Beltrán-Pellicer, Giacomone y Burgos 2018), mostrando que estos presentan diversos grados de idoneidad, observándose que los vídeos más populares no tienen por qué ser los más adecuados. Además, muchos de estos vídeos presentan errores e imprecisiones. Estos resultados permiten destacar que la diversidad de significados que presentan los videos, en torno a un mismo objeto matemático, debe ser tenida en cuenta por los docentes, pues es algo que puede interferir en la negociación de significados en el aula. Este tipo de análisis se puede utilizar como experiencia formativa en la formación de profesores (Burgos, Beltrán-Pellicer y Godino, 2020).

Sería interesante realizar estudios similares a los anteriormente mencionados, pero sobre vídeos orientados a la enseñanza de contenidos de probabilidad y estadística. De esta manera, se podrían comparar los resultados de dichas investigaciones con los obtenidos en el ámbito de la proporcionalidad. Posteriormente, sería interesante el planteamiento de experiencias en el ámbito de la formación de profesores.

3. Análisis preliminar: vídeos educativos sobre la mediana, dificultades del alumnado

La mediana constituye un objeto de interés particular, debido a que en torno a su concepto, cálculo e interpretación en diversas situaciones surgen numerosas dificultades. A continuación, exponemos una primera revisión de la literatura existente clasificando estas dificultades según la ontología de objetos primarios del EOS.

En primer lugar, hay un grupo de dificultades que tienen que ver con el campo de *situaciones-problema* en las que emerge la idea de mediana. De esta manera, las investigaciones de António y Mugabe (2013) y Mayén, Díaz y Batanero (2009) observan que cuando se plantea una tarea en la que se debe elegir una medida de tendencia central, se realiza el cálculo de la media o de la moda, en lugar de la mediana a pesar de que los datos sean ordinales o existan valores atípicos.

Además, hay dificultades específicamente relacionadas con el *lenguaje*. En las investigaciones de Cobo (2003) y Mayén et al. (2009) los estudiantes calculan la media a pesar de que se les demanda el cálculo de la mediana. Por tanto, se confunde la terminología de los estadísticos, aunque se aplique correctamente su definición.

En cuanto a los *conceptos-definición*, Barr (1980), Carvalho (2001) y Cobo (2003) describen en sus investigaciones que el error más frecuente relacionado con la definición de la mediana es caracterizarla como el centro del conjunto de datos sin ordenar. Como señalan Mayén et al. (2009), el error puede estar relacionado con que el sujeto asume que el orden hace referencia a cómo se han presentado los datos y no el orden numérico convencional. Carvalho (2001) y Ruiz (2006) identifican que se confunden las frecuencias y los valores de la variable, calculando la media o mediana con las frecuencias.

Por otro lado, encontramos dificultades y obstáculos relacionados con *proposiciones y propiedades* en torno a la mediana. En el trabajo de Batanero, Godino y Navas (1997) sobre el estudio de los promedios se observa que los estudiantes suponen que la media se sitúa en el centro de la distribución, independientemente de la forma de esta. Es decir, se generaliza erróneamente la idea de representatividad asociada al concepto de media en contextos en los que la mediana o la moda puede serían un valor más representativo del conjunto de datos. El trabajo de Mayén et al. (2009) confirma que los estudiantes no identifican que la mediana puede ser el mejor representante del conjunto de datos, resultado obtenido también en otras investigaciones (Groth y Bergner, 2006; Jacobbe, 2008)

Los *procedimientos* son otra fuente de dificultades. Siguiendo a Schuyten (1991), suponen una gran dificultad en el trabajo con los estadísticos de orden y, en particular, con la mediana, por el número de algoritmos diferentes que existen para su cálculo. En concreto, el trabajo de Schuyten (2001) revela que la dificultad surge cuando los datos se dan organizados en una tabla de frecuencias o mediante representaciones gráficas. Por su parte, Cobo (2003) identifica que, en el cálculo de la mediana, los estudiantes no identifican su valor cuando se debe aplicar el convenio en el caso de que resulten dos valores diferentes. Este error es debido a un desconocimiento del criterio para establecer dicho valor. Mayén et al. (2009) identifican que los estudiantes no consideran la frecuencia en el cálculo de la mediana. Estos autores también observan errores con respecto al orden. Es decir, cuando el alumno se encuentra con algún valor repetido al tratar de ordenar de menor a mayor la serie de datos, este no le otorga importancia y resuelve el dilema omitiendo uno de los valores.

Por último, encontramos dificultades asociadas a los *argumentos*. El trabajo de Mayén et al. (2009) pone en relieve que la tarea de argumentar resulta compleja, así como la interpretación que se hace de una justificación.

4. Conclusiones

El trabajo, tras haber identificado en la bibliografía las dificultades y obstáculos más comunes del alumnado, continuará siguiendo la misma metodología que en anteriores trabajos (Beltrán-Pellicer, Giacomone y Burgos, 2018). Es decir, nos pondremos en el papel de un alumno de un curso específico que decide buscar en YouTube sobre la mediana, y analizaremos los vídeos tratando de desgranar qué configuraciones de objetos primarios aparecen, así como los errores e imprecisiones, y si estos pueden estar relacionados con las dificultades de los alumnos. De esta manera, obtendremos una valoración cualitativa de la idoneidad didáctica de estos, al mismo tiempo que una panorámica de la diversidad de significados.

La TID ofrece un campo activo de trabajo que puede combinarse con metodologías de formación docente y crecimiento profesional, como el estudio de clases (Hummes, Font y Breda, 2019). En este breve capítulo hemos planteado el interés en analizar vídeos educativos online sobre contenidos específicos de probabilidad y estadística. En primer lugar, porque resulta ser un recurso utilizado por el alumnado como refuerzo o ayuda al estudio; y, en segundo lugar, porque son un elemento clave en algunas propuestas metodológicas como la clase invertida. Finalmente, estos estudios se complementarían con el diseño de experiencias con profesores en formación.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado dentro del proyecto PID2019-105601GB-I00 y el grupo S60_20R - Investigación en Educación Matemática (Gobierno de Aragón y Fondo Social Europeo).

Referencias

Alsina, À. y Domingo, M. (2010). Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(1), 7-32.

António, E. y Mugabe, D.A.A.Z. (2013). O conceito da mediana na perspectiva dos estudantes principiantes. *International Journal of Scientific & Technology Research, 2*(9), 202-206

Arguedas-Matarrita, C., Concari, S. B. y Giacomone, B. (2017). La idoneidad didáctica de los laboratorios remotos como recursos para la enseñanza y aprendizaje de la física Didactic suitability of remote laboratories as resources for physics teaching and learning. *Revista de Enseñanza de la Física, 29*(Extra), 511-517.

Aroza, C. J., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2017). Criterios de idoneidad didáctica para el estudio de la proporcionalidad en educación primaria y secundaria. En *VIII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Libro de actas*. Andújar, España: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Barr, G. V. (1980). Some students' ideas on the median and the mode. *Teaching Statistics, 2*, 38-41.

Batanero, C., Godino, J. D. y Navas, F. (1997). Concepciones de maestros de primaria en formación sobre los promedios. En H. Salmerón (Ed.), *VII Jornadas LOGSE: Evaluación educativa* (pp. 310-304). Granada, Spain: University of Granada.

Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B. y Burgos, M. (2018). Online educational videos according to specific didactics: the case of mathematics / Los vídeos educativos en línea desde las didácticas específicas: el caso de las matemáticas. *Cultura y Educación, 30*(4), 633-662. doi: 10.1080/11356405.2018.1524651

Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D. y Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 32*(61), 526-548. doi: 10.1590/1980-4415v32n61a11

Blanco-Álvarez, H., Fernández-Oliveras, A. y Oliveras, M. L. (2017). Evaluación de una clase de matemáticas diseñada desde la etnomatemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.

Breda, A., Font, V. y Pino-Fan, L.R. (2018). Criterios valorativos y normativos en la Didáctica de las Matemáticas: el caso del constructo idoneidad didáctica. *Bolema, 32*(60), p. 255 - 278.

Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P. y Godino, J. D. (2020). La cuestión de la idoneidad de los vídeos educativos de matemáticas: una experiencia de análisis con futuros maestros de educación primaria / The issue of didactical suitability in mathematics educational videos: experience of analysis with prospective primary school teachers. *Revista Española de Pedagogía, 78*(275), 27-49.

Carvalho, C. (2001). *Interaçao entre pares. Contributos para a promoçao do desenvolvimiento lógico e do desempenho estatístico no 7º ano de escolaridade*. Tesis Doctoral. Universidad de Lisboa.

Cobo, B. (2003). *Significado de las medidas de posición central para los estudiantes de secundaria*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada.

Cruz A., Gea M. y Giacomone B. (2017). Criterios de idoneidad epistémica para el estudio de la geometría espacial en educación primaria. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.

Groth, R. E. y Bergner, J. A. (2006). Preservice elementary teachers' conceptual and procedural knowledge of mean, median, and mode. *Mathematical Thinking and Learning, 8*, 37-63.

Hummes, V. B., Font, V. y Breda, A. (2019). Uso combinado del estudio de clases y la idoneidad didáctica para el desarrollo de la reflexión sobre la propia práctica en la formación de profesores de matemáticas. *Acta Scientiae, 21*(1), 64-82.

Jacobbe, T. (2008). Elementary school teachers' understanding of the mean and median. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), *Joint ICMI/IASE study: Statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. Proceedings of the ICMI Study 18 Conference and IASE 2008 Round Table Conference*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education.

Mayén, S., Batanero, C. y Díaz, C. (2009). Conflictos semióticos de estudiantes mexicanos en un problema de comparación de datos ordinales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 12*(2), 151-178.

Robles, M. G., Tellechea, E. y Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática, 26*(2), 69-109.

Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria*. Tesis de Máster, CICATA, México.

Schuyten, G. (1991). Statistical thinking in psychology and education. En D. Vere-Jones (Ed.), *Proceedings of the Third International Conference on Teaching Statistics* (Vol. 2, pp. 486-490). Dunedin: ISI.

Schuyten, G. (2001). Research skills: a closely connected triplet of research area, research methodology and statistics. En C. Batanero (Ed.), *Training researchers in the use of statistics* (pp, 227-230). Granada: IASE.

Vasconcelos, D. M. de y Carvalho, J. I. F. (2019). Idoneidade cognitivo-afetiva de uma sequência didática para a construção do conhecimento de razões trigonométricas por meio de uma história em quadrinhos. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana - Em Teia. 10*(2), 1-24.

Concepções estatísticas: um estudo com alunos do ensino médio

Cassio Cristiano Giordano[1], Roberta Schnorr Buehring[2]
[1]Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP),
[2]Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC)

Resumo

Realizamos uma pesquisa qualitativa, na qual buscamos identificar os conhecimentos e as concepções de 86 alunos do último ano do ensino médio de uma escola pública brasileira a respeito da estatística descritiva, mobilizadas na tentativa de solução de problemas, após o desenvolvimento de projetos de pesquisa estatística. Adotamos, em nosso referencial teórico, a Análise Exploratória de Dados (AED) e a Teoria das Concepções. Em nossos procedimentos metodológicos, lançamos mão dos constructos da Análise Estatística Implicativa (ASI) – os grafos implicativo, coesitivo e de similaridades – elaborados por meio do software CHIC (Classificação Hierárquica Implicativa e Coesiva), com o intuito de avaliar o nível de conhecimento dos alunos, ao passo que empregamos o modelo ck¢ na análise de suas concepções. Ao final de nossas investigações, conseguimos identificar algumas concepções mobilizadas, bem como mudança de concepções, o que, no modelo ck¢, é compreendida como um indicador de aprendizagem.

Palavras-chave: Concepções, Educação Estatística, Teoria das Concepções, Análise Estatística Implicativa, Projetos.

1. Introdução

A compreensão da Estatística é essencial para a educação escolar, para a vida profissional, bem como para o exercício pleno da cidadania no século XXI. Nesse sentido, com base em nossa revisão de literatura, consideramos a Aprendizagem Baseada em Projetos (ABP) um elemento com amplo potencial para o desenvolvimento da literacia estatística, na perspectiva de Gal (2019). Esse entendimento está alinhado com a Base Curricular Nacional Comum - BNCC (Brasil, 2018).

A proposta curricular em vigor na escola em que realizamos a pesquisa, no momento da coleta de dados, previa o ensino de estatística descritiva (o ensino de estatística inferencial não estava previsto no currículo) apenas no segundo semestre do terceiro e último ano do ensino médio. Levamos esse fato em conta, ao avaliar o nível de conhecimento prévio dos alunos, por meio da Análise Estatística Implicativa (ASI), antes do início da abordagem da Estatística por meio de projetos.

Após a finalização dos projetos destes alunos, buscamos identificar as concepções mobilizadas sobre os conteúdos curriculares envolvidos: variabilidade, medidas de tendência central, medidas de dispersão e registros de representação (gráficos estatísticos e tabelas de distribuição de frequências - TDF). A questão que norteou nossa pesquisa foi: "Que concepções são mobilizadas por alunos do ensino médio ao tentar solucionar problemas relacionados à estatística descritiva, após o desenvolvimento de projetos nessa área?"

2. Marco teórico

A opção pelo Análise Exploratória de Dados nos pareceu uma escolha natural, pois sua abordagem estatística valoriza a postura investigativa crítica do aluno e pressupõe uma proposta didático-pedagógica voltada para a pesquisa, por parte professor.

Como características básicas da AED, Batanero, Estepa e Godino (1991) destacam a possibilidade de gerar situações de aprendizagem sobre temas de interesse dos alunos, com base em representações gráficas que favoreçam a percepção de variabilidade, a avaliação de medidas de ordem que minimizem quaisquer casos atípicos, o uso de diferentes escalas e a falta de uma teoria matemática complexa, com ferramentas desnecessárias para a etapa do ensino em questão.

Estamos interessados no desenvolvimento de projetos estatísticos pelos alunos, na perspectiva do AED. Para Batanero e Díaz (2004), projetos estatísticos motivam os alunos, ao contrário da mera resolução de longas listas de exercícios, repetitivos e descontextualizados. Para essas autoras, a Estatística é a ciência dos dados, e estes não são apenas números, mas números em contexto. Segundo elas, no trabalho do projeto, a ênfase recai sobre as tarefas realistas. As etapas do desenvolvimento desse trabalho de ABP estão representados abaixo, com o Ciclo Investigativo de Pesquisa:

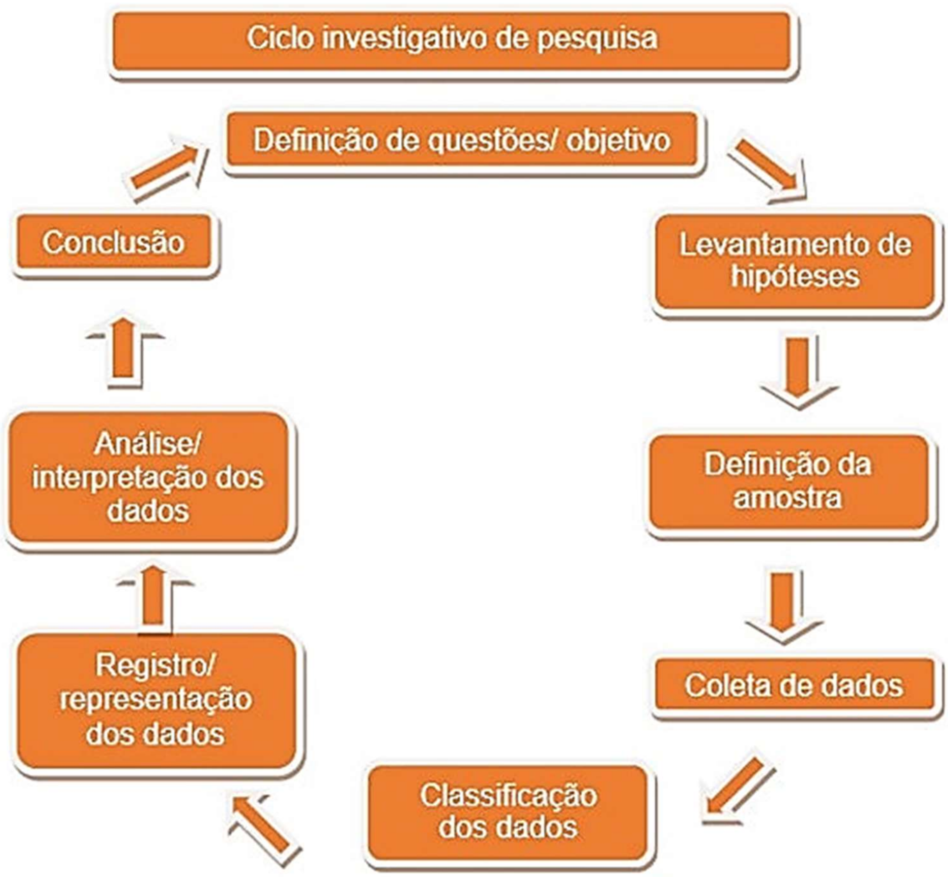


Figura 1. Ciclo Investigativo de Pesquisa.
Fonte: Guimarães e Gitirana (2013, p. 97)

Batanero e Díaz (2011) enfatizam que o desenvolvimento de projetos contribui para a aquisição das seguintes habilidades, fundamentais para o aluno do ensino médio: competência comunicativa linguística, competência matemática, competência de reconhecimento e interação com o mundo físico, competência para o tratamento da informação, competência digital, competência social para o exercício da cidadania, competência para "aprender a aprender", competência para questionar criticamente e competência para a conquista de autonomia e iniciativa pessoal. Tais competências são necessárias para o desenvolvimento dos componentes cognitivos e atitudinais da literacia estatística. Baseados em nossas investigações e em nossa revisão da literatura, assumimos que o trabalho com projetos pode contribuir para o aprimoramento dessas habilidades, destacadas por Gal (2019):

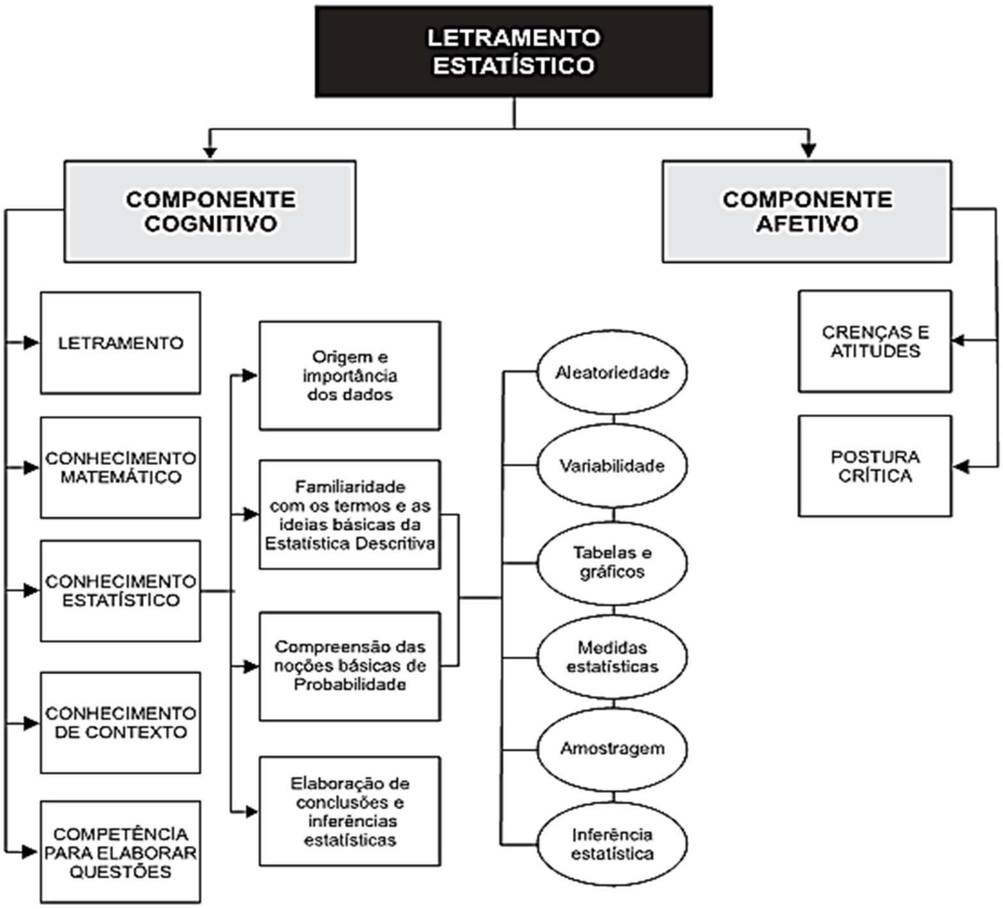


Figura 2. Modelo de letramento estatístico.
Fonte: Baseado em Gal (2019)

Segundo Balacheff e Gaudin (2002), o conhecimento não pode ser totalmente reduzido a comportamentos, assim como também não pode ser ensinado na ausência deles. Cada ação mobiliza uma quantidade considerável de conhecimento. Para desenvolver novos conhecimentos, bem como aprofundar conhecimentos prévios, é necessário mobilizar concepções diretamente relacionadas aos problemas enfrentados pelos alunos. Balacheff (2001) afirma que uma concepção não pode e não deve ser separada do contexto no qual emerge o problema, o que a destaca e lhe dá significado. As concepções permitem interpretações, previsões e construção de modelos e, acima de tudo, descrevem uma parte da estrutura cognitiva do aluno.

Adotaremos, em nossa pesquisa, as definições de conhecimento, concepção e conceito da teoria ck¢, a partir do modelo proposto por Balacheff (2002). Para ele, uma concepção é uma estrutura mental, característica de um determinado sujeito, construída um observador de seu comportamento (em nosso caso, o pesquisador). O aprendizado, por sua vez, consiste na passagem de uma concepção antiga para uma nova, mais complexa e abrangente.

Um conceito é constituído por um conjunto de conhecimentos, e um conhecimento, por sua vez, é constituído por um conjunto de concepções, como vemos representado a seguir:

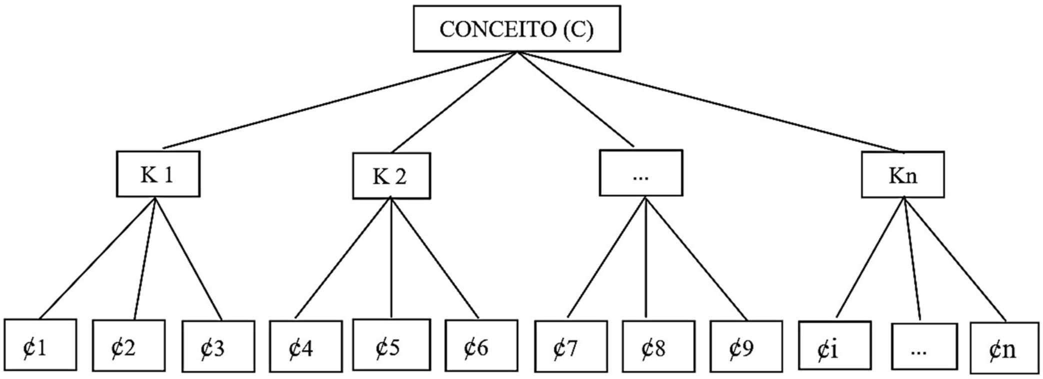


Figura 2. Esquema das relações entre concepções, conhecimentos e conceitos.
Fonte: Baseado em segundo Balacheff (2001)

Uma concepção, no modelo ck¢, é um estado de equilíbrio de um sistema, sujeito-ambiente, considerando suas limitações e imposições, ou seja, qualquer coisa que influencie ou interfira em sua operação. A concepção pertence ao sujeito e, portanto, pode ou não estar correta do ponto de vista do conhecimento de referência. Uma concepção implica em uma quádrupla, simbolizada pelas letras P, R, L, Σ, onde P é um conjunto de problemas nos quais ¢ está operando; R é um conjunto de operadores (ferramentas cognitivas, como teoremas em ação ou conceitos em ação); L é um sistema de representações, que permite a expressão dos elementos de P e R; Σ é uma estrutura de controle que garante a não contradição da concepção ¢. Nessa quádrupla, um sujeito que enfrenta um problema a ser resolvido pode manifestar várias concepções sobre o mesmo objeto matemático e mobilizar uma ou outra, de acordo com a natureza do problema.

3. Procedimentos metodológicos

Investigamos as concepções mobilizadas pelos alunos na solução de problemas estatísticos, quando o assunto é abordado por meio de projetos, antes e depois de sua realização, desde o planejamento e a coleta de dados até a análise final e divulgação dos resultados da pesquisa.

Optamos pela abordagem metodológica da pesquisa qualitativa, na perspectiva de Creswell (2010). Para avaliar o nível de conhecimento dos alunos, antes do desenvolvimento do projeto, aplicamos um questionário composto por perguntas objetivas sobre Estatística básica, analisando as respostas por meio da ASI. Os sujeitos da pesquisa foram 86 alunos do último ano do ensino médio de uma escola pública brasileira, com idades entre dezesseis e dezenove anos. Eles responderam a um questionário composto por 29 perguntas estatísticas, analisadas com a ajuda do software CHIC (Classificação Hierárquica Implicativa e Coesitiva).

Este software permite extrair informações de um conjunto de dados, sujeitos e atributos cruzados, regras de associação entre variáveis, indicando o índice de qualidade da associação e representando uma estruturação dessas variáveis de acordo com Couturier e Gras (2005) e Gras et al. (2013).

Na segunda etapa da investigação, quatro grupos de alunos (dois trios e duas duplas) resolveram três problemas envolvendo conceitos básicos de Estatísticas Descritiva durante um período de uma a três sessões, com até 100 minutos de duração, cada, em três dias distintos de uma mesma semana. Esta atividade foi registrada por meio de produção escrita e de gravações em áudio das interações entre os alunos do grupo sendo, a seguir, analisada à luz da Teoria das Concepções.

4. Resultados

A ASI identificou variáveis e forneceu explicações para avaliar o nível de conhecimento dos alunos, com a ajuda do software CHIC. Realizamos a análise relacionando essas variáveis, interpretando os grafos implicativo, coesitivo e de similaridades, porém, por razões de limitação de espaço, neste artigo, não é possível apresentá-los. Os resultados por nós obtidos indicam que os conhecimentos prévios apresentados pelos alunos eram bastante frágeis e precisavam ser trabalhados com maior profundidade ao longo do projeto a ser desenvolvido, na abordagem dos conteúdos estatísticos e probabilísticos durante o bimestre seguinte. A ASI mostrou-se uma boa ferramenta para avaliar as respostas dos alunos.

Identificamos algumas concepções mobilizadas por eles na solução de problemas estatísticos. Aqui não é possível apresentar as concepções identificadas, devidamente representada por meio dos seus quatro elementos constituintes por razões de espaço, mas podemos enfatizar, em termos gerais, que enquanto o trabalho estatístico cooperativo é realizado em pequenos grupos, o confronto de ideias, de abordagens, de hipóteses, favorecem a esperada mudança de concepção e o refinamento do pensamento estatístico, como previsto por Garfield (1993),. Em nosso caso, paralelamente à ação das estruturas de controle individuais, a discussão coletiva permitiu verificar hipóteses, revisar respostas e aproximar-se dos resultados esperados.

Díaz (2016) destaca que, segundo depoimentos dos próprios alunos, o trabalho colaborativo em pequenos grupos reduz a ansiedade, o que contribui para uma maior compreensão das noções estatísticas e a aquisição de experiência. Segundo esse autor, as atividades colaborativas são mais tranquilizadoras, motivadoras e estimulantes, favorecem a concentração na tarefa e propiciam o surgimento de uma diversidade de propostas. O estímulo à ajuda mútua permite a assimilação de conceitos, o progresso das atividades, a redução da percepção de dificuldade da tarefa e a redução da ansiedade. O cuidado coletivo reduz o fardo das dificuldades, a troca de opiniões e o compartilhamento de ideias melhoram a autoconfiança e o engajamento coletivo. Percebemos os mesmos efeitos ao observar o trabalho dos alunos em grupos, tanto após o diagnóstico de seus conhecimentos prévios, através da ASI e durante o desenvolvimento dos projetos de pesquisa quanto, finalmente, durante a resolução de problemas estatísticos em pequenos grupos.

5. Considerações finais

A abordagem da Estatística através de projetos pode contribuir para a mudança nas concepções dos alunos. Como descobrimos, existem poucos estudos publicados sobre concepções da perspectiva do modelo ck¢. Com quase nenhum contato escolar prévio com a Estatística, em um ambiente escolar, os alunos apresentaram compreensão e leitura mínimas de tabelas e gráficos estatísticos, bem como medidas de tendência central e dispersão. Um dos resultados de nosso trabalho que julgamos ser mais relevantes, é de que as estruturas de controle manifestadas por um aluno mobilizam as estruturas cognitivas dos demais, promovendo o aprimoramento de suas ideias e a revisão de suas próprias concepções. Ao compartilhar com os colegas o esboço de um gráfico estatístico, rever as passagens do cálculo de uma medida de dispersão, comparar a determinação de uma medida de tendência central com outra obtida pelo colega por um método diferente e discutir, dentro do grupo, seu entendimento sobre variabilidade, os estudantes reafirmaram ou reviram suas concepções, proporcionando mudanças que podem ser consideradas como indicadores de aprendizagem, dentro do modelo ck¢ de Balacheff (2001, 2002). O conhecimento do contexto, destacado pelo modelo de Gal (2019), teve papel fundamental na validação das concepções.

Referências

Balacheff, N. (2001). Les connaissances, pluralité de conceptions. Le cas des mathématiques. *Les Cahiers du Laboratoire Leibniz*, 19, 83-90.

Balacheff, N. (2002). Cadre, registre et conception: note sur les relations entre trois concepts clés de la didactique. *Les Cahiers du laboratoire Leibniz*, *58*, 1-18.

Balacheff, N.; Gaudin, N. (2002). Students conceptions: an introduction to a formal characterization. *Les Cahiers du Laboratoire Leibnitz 65*, p.1-21. Disponible en: https://telearn.archives-ouvertes.fr/hal-00190425/document.

Batanero, C.; Díaz, C. (2004) El papel de los proyectos en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. Em J. P. Royo (Ed.). *Aspectos didácticos de las matemáticas* (pp. 125-164). Zaragoza: ICE.

Batanero, C.; Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Granada: Universidad de Granada.

Batanero, C., Estepa, A.; Godino, J. D. (1991). Análisis exploratorio de datos: sus posibilidades en la enseñanza secundaria. *Suma*, *9,* 25-31.

Brasil. (2018) *Base Nacional Comum Curricular - Educação é a Base:* Ensino Médio. Beasília: Ministério da Educação e Cultura, Brasília.

Couturier, R. D.; Gras, R. (2005) CHIC: traitement de données avec l'analyse implicative. En C. Ritschard y Djeraba (Eds.), *Journées d'extraction et gestion des connaissances (EGC'2005)* (Vol.2, pp. 679-684).

Creswell, J. W. (2010) *Projeto de pesquisa métodos qualitativo, quantitativo e misto*. Porto Alegre: Artmed.

Diaz, D. (2016). Les facteurs influençant la réussite des activités collaboratives médiées par les TICE dans une situation de formation universitaire à la statistique (Doctoral dissertation, Thèse de doctorat (Dirigée par Jean-Claude Régnier) Lyon 2, Lyon, France, 2016.

Gal, I. (2019) Understanding statistical literacy: About knowledge of contexts and models. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds*.), Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*. Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Garfield, J. (1993) Teaching statistics using small-group cooperative learning. *Journal of Statistics Education*, v. 1, n. 1, p. 1-9.

Gras, R., Régnier, J. C., Marinica, C.; Guillet, F. (2013) *L'analyse statistique implicative Méthode exploratoire et confirmatoire à la recherche de causalités*. Toulouse: Cépaduès.

Guimarães, G.; Gitirana, V. (2013). Estatística no Ensino Fundamental: a pesquisa como eixo estruturador. In: Borba, R. E. S. R.; Monteiro, C. E. F. (org.) *Processos de Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática*. V.1. Ed. UFPE, Recife.

Algunos conflictos semióticos de estudiantes de bachillerato sobre el muestreo

Nuria Begué[1], María M. Gea[2], Carmen Batanero[2] y Silvia M. Valenzuela-Ruiz[2]
[1]Universidad de Zaragoza, [2]Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo presentamos un resumen de los conflictos semióticos identificados en una investigación sobre comprensión del muestreo con estudiantes de bachillerato. El estudio se realiza con una muestra de 127 estudiantes españoles de bachillerato a quienes se pide escribir cuatro muestras de una población binomial y justificar las muestras proporcionadas. Se consideran cuatro tareas idénticas, pero haciendo variar los parámetros de la distribución binomial en cada una de ellas. A partir del análisis de sus argumentos se identifican los conflictos semióticos que asocian a la aleatoriedad o muestreo y que incluyen propiedades que no se adaptan al significado institucional de estos conceptos.

Palabras clave: Muestreo, distribución binomial, conflicto semiótico.

1. Introducción

El muestreo es una idea básica, tanto en inferencia estadística como en probabilidad, por su relación con la definición frecuencial de este término. En su comprensión se ven implicadas dos ideas que, aunque parezcan contrarias, se deben complementar y coordinar de manera adecuada para inferir información en el trabajo con muestras, como son la representatividad y variabilidad muestral. La primera se refiere a que una muestra aleatoria de tamaño suficiente tendrá características parecidas a las correspondientes características en la población, mientras que la variabilidad subyace en que las muestras pueden cambiar en su composición y características (Saldahna & Thompson, 2002).

La mayor parte de nuestro conocimiento se basa en el muestreo, que aparece en muchas situaciones cotidianas en las que no es posible observar toda la realidad. Heitele (1975) la incluyó en su lista de ideas estocásticas fundamentales, siendo, base de la inferencia. Esto quiere decir, que es posible enseñar ideas de muestreo desde la infancia, utilizando un nivel de formalidad adecuado.

En España, la enseñanza formal del tema se completa en secundaria y bachillerato, con el estudio de la distribución binomial (MECD, 2015). Con objeto de analizar la comprensión de los estudiantes sobre muestreo en estas etapas educativas se han realizado investigaciones donde se pide generar muestras de cuatro elementos de una distribución binomial, variando los parámetros de la misma, y se han analizado los valores proporcionados (Begué, 2019; Begué, Batanero, & Gea, 2018; 2019).

Para el análisis nos apoyamos en estudios previos como los relacionados con la heurística de la representatividad (Tversky & Kahneman, 1982) y los niveles de razonamiento sobre muestreo, descritos por Shaughnessy, Ciancetta y Canada (2004): aditivo, proporcional y distribucional. Un resultado de nuestros anteriores trabajos fue que, mientras que la representatividad muestral fue intuitiva, los estudiantes tuvieron dificultad para comprender la variabilidad muestral y no llegan a alcanzar el razonamiento distribucional sobre muestreo (Shaugnessy et al., 2004), quedando en un razonamiento puramente proporcional. En Begué, Batanero y Gea (2019) se pidió a los estudiantes de bachillerato justificar las muestras producidas. El análisis detallado de estas justificaciones permitió identificar una serie de conflictos semióticos de los estudiantes relacionados con las ideas de aleatoriedad y muestreo. La finalidad de este trabajo es analizar algunos de estos conflictos semióticos.

2. Fundamentos

Nos apoyamos en el enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero, & Font, 2007; 2019), donde la situación-problema y las prácticas matemáticas realizadas en su resolución permiten definir tanto a un objeto matemático como su significado (institucional o personal). En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos o perceptibles (símbolos, gráficos, etc.), que son representados en forma textual, oral, gráfica o simbólica y también objetos no ostensivos (que evocamos al hacer matemáticas).

La importancia que adquieren las representaciones de los objetos matemáticos en su enseñanza y aprendizaje es ampliamente asumida en didáctica de la matemática, aunque no se es suficientemente consciente de la variedad de objetos que pueden desempeñar el papel de representación de un objeto representado (Godino, 2002; Godino et al., 2007). Para analizar esta cuestión, en el EOS se considera la noción de *función semiótica*, que refiere a las relaciones entre objetos y sus correspondientes procesos de interpretación. En Godino y Batanero (1998) se describe la noción de función semiótica como una correspondencia entre dos términos, que pone en juego tres componentes:

- El término *expresión* (objeto inicial o signo);
- El término *contenido* (objeto final o significado del signo), es decir, lo que se quiere decir según lo representado;
- Un criterio o regla de correspondencia (código interpretativo), esto es, lo que relaciona la expresión y el contenido.

Cada función semiótica implica, por parte del agente interpretante, un acto de semiosis que constituye su conocimiento personal. En este sentido, un conocimiento se entiende como el contenido de una función semiótica (Godino et al., 2007).

Dada la diversidad de objetos (campos de problemas, conceptos, proposiciones, lenguaje, procedimientos y argumentos) que, según el EOS, se ven implicados en las prácticas matemáticas, el carácter inmaterial de los objetos y la variedad de representaciones utilizadas al resolver situaciones-problemas, en general, un sujeto requiere numerosos procesos interpretativos para adquirir el significado de un objeto matemático. En ocasiones, quien interpreta una expresión (en nuestro caso, el estudiante) puede realizar una interpretación no acorde al significado que a dicha expresión se ha dado en una institución de referencia (por ejemplo, el profesor). Godino (2002) propone la idea de *conflicto semiótico* para determinar cualquier disparidad entre los significados atribuidos a una expresión por dos sujetos (personas o instituciones). Estos errores de interpretación (conflictos semióticos), producen errores que no siempre son debidos a falta de conocimientos, sino a no haber relacionado adecuadamente los dos términos de una función semiótica. La idea de conflicto semiótico se ha utilizado para explicar errores de los estudiantes (por ejemplo, en Mayén, Batanero, & Díaz, 2009; Mayén, Díaz, & Batanero, 2009) y desajustes respecto a la matemática o las orientaciones curriculares en el análisis de libros de texto (Contreras, García, & Sánchez, 2005; Gea, López-Martín, & Roa, 2015).

3. Método

En Begué, Batanero y Gea (2019) se propuso a una muestra de 127 estudiantes de bachillerato cuatro tareas en las que se pide cuatro valores probables de una población binomial, haciendo variar los parámetros de la población en el contexto de cada tarea.

En la primera se describe un experimento, consistente en lanzar 100 chinchetas sobre una mesa, indicando que en la realización previa del experimento se obtiene 68 de 100 chinchetas con la punta hacia arriba, por lo que se trata de una población binomial B (100, 0,68). En concreto, se pide a los estudiantes valores probables del número de chinchetas con la punta hacia arriba en cuatro repeticiones del experimento. Las otras tres tareas son idénticas, salvo que se varían las distribuciones binomiales de partida B (100, 0,5), B (10, 0,5) y B (10, 0,7). Más detalles sobre las tareas y el análisis cuantitativo de los resultados de las mismas en una muestra de alumnos de menor edad se pueden consultar en Begué, Batanero y Gea (2018).

En lo que sigue analizamos algunos de los conflictos semióticos mostrados en el análisis de los argumentos de los estudiantes en el ítem 1, en relación a una población binomial B (100, 0,68) (lanzamiento de 100 chinchetas), transcribiendo el argumento del estudiante, junto con los cuatro valores proporcionados (entre paréntesis).

4. Algunos resultados

Encontramos que muchos argumentos de los estudiantes fueron muy completos, pues, por un lado, identifican la asimetría del dispositivo mediante el análisis físico del mismo y, por otro lado, presentan una comprensión del enfoque frecuencial de la probabilidad adecuado para apoyar los argumentos de las muestras que proporcionan, e incluso señalan la variabilidad intrínseca al proceso de muestreo.

> E1: Como el % de chinchetas que caen de cada forma en el caso del profesor: 68% hacia arriba y 32% hacia abajo. Por lo que el porcentaje que tendrá en el caso de los niños será similar. Moviendo el porcentaje mínimamente hasta un 8% por ejemplo, por lo que los márgenes serán un 60%-74% hacia arriba y 24% - 40% hacia abajo, pero siempre teniendo en cuenta que es más frecuente que las chinchetas que caigan hacia arriba, ya que la parte de abajo pesa más, por lo que tiende a ir hacia abajo (70, 60, 72, 65).

Sin embargo, también se observaron respuestas en las que los estudiantes presentan conflictos semióticos, por ejemplo, al asignar propiedades inexistentes a los sucesos aleatorios, como los siguientes:

C1. *Confusión entre suceso aleatorio y suceso equiprobable,* donde subyace el sesgo de equiprobabilidad descrito por Lecoutre (1992). Como ejemplo, el estudiante E2 considera que, al ser una experiencia aleatoria, cualquier resultado puede ocurrir con probabilidad 50%, sin tener en cuenta que el mayor peso de la cabeza de la chincheta hace más probable un suceso que otro, ni tener en cuenta la frecuencia relativa dada en el enunciado del problema. Consecuentemente, asigna valores cuya media es exactamente 50, unos por encima y otros por debajo de este valor. Por tanto, el conflicto se debe a que se establece una correspondencia al asignar una propiedad (equiprobabilidad) no existente al concepto de suceso aleatorio y se establece una función semiótica sin fundamento matemático.

> E2: A priori la probabilidad es que sea 50% y 50% por lo que en unos casos superar la media y en otros estará por debajo al ser aleatorio (60, 40, 30, 70).

C2. *Suponer que la aleatoriedad indica máxima variabilidad*, por lo que se consideran resultados de la experiencia aleatoria muy diferentes entre sí. Se trata de otra propiedad mal asignada, pues, aunque la aleatoriedad implica variabilidad, la variabilidad de los datos de una muestra puede ser grande o pequeña, dependiendo de la variabilidad de la población de partida. En la respuesta dada por el estudiante E3 podemos observar que, además del conflicto citado anteriormente (sesgo de equiprobabilidad), que los valores indicados se alejan mucho del 50%. El argumento del estudiante aporta indicios de su pobre razonamiento distribucional.

> E3: Pienso que cualquier resultado que se escriba será correcto porque cada chincheta que se tira tiene un 50% de probabilidades de caer con la punta hacia arriba y 50% de probabilidades de caer con la punta hacia abajo. De esa manera el resultado de cómo caen las chinchetas, no tiene nada que ver con el resultado que daba el profesor (73, 2, 100, 0).

C3. *No relacionar la probabilidad teórica de un suceso con su frecuencia relativa* en una muestra de ensayos. Ninguno de los estudiantes en los ejemplos anteriores ha relacionado la probabilidad de los resultados en los sucesivos experimentos con la frecuencia relativa (0,68) que en 100 repeticiones se obtuvo de la cabeza hacia arriba. De hecho, en el ejemplo anterior el estudiante E3 no considera que la muestra del profesor informe sobre su probabilidad de ocurrencia. En este caso, el conflicto semiótico ocurre al no relacionar dos conceptos (frecuencia relativa y probabilidad teórica) y, por tanto, no establecer la correspondiente función semiótica.

En relación a estos dos últimos conflictos cabe añadir, la dificultad de algunos estudiantes en relacionar la aleatoriedad con la probabilidad. Por una parte, algunos estudiantes muestran el enfoque en el resultado, descrito por Konold (1989), cuando interpretan una pregunta de probabilidad de manera determinista. En este sentido, la respuesta del estudiante E4 muestra su dificultad en comprender la probabilidad como una medida de la incertidumbre en situaciones aleatorias, así como considerar las características de la distribución binomial. También el estudiante E5 relaciona de manera errónea la aleatoriedad y la probabilidad, pues se demanda: ¿cuál es el resultado más probable? Sin embargo, el alumno interpreta y responde a la pregunta: ¿qué resultado ocurrirá?, la cual exige realizar una predicción segura del resultado en la que se utilice la asignación frecuencial, para realizar la estimación y justificarla.

> E4: He puesto valores muy diferentes ya que puede salir cualquier resultado.” (47, 85, 28, 40).

> E5: No existe ninguna razón, porque es azar (62, 58, 55, 44).

Por otra parte, cabe destacar que algunos estudiantes muestran la creencia en la ley de los pequeños números, pues proporcionan respuestas donde la mitad de las estimaciones se encuentra por encima del valor teórico y las otras dos por debajo. Ocurre incluso en estudiantes que utilizan la probabilidad frecuencial para dar sus estimaciones. Así, en el siguiente ejemplo se observa como el estudiante E6 se apoya en las propiedades físicas del objeto (lo cual sería adecuado) pero en su respuesta se considera que la convergencia se debe producir incluso en pequeñas muestras. Estos estudiantes realizan una generalización indebida de la aproximación frecuencial de la probabilidad. Este razonamiento fue identificado por Tversky y Kahneman (1971) y encontrado en muchas otras investigaciones previas a este trabajo como, por ejemplo, Cañizares (1997) y Serrano, Batanero, Ortiz, y Cañizares (1998).

> E6: Con este objeto he tenido en cuenta el peso de la chincheta, es decir, la base pesa más que la punta por lo que al lanzarlas caerán de una forma, pero en ese instante se equilibrará y se decantará por el pincho hacia arriba. De allí que los porcentajes sean más hacia las chinchetas de punta hacia arriba (75, 70, 60, 50).

5. Reflexión final

En estos ejemplos podemos observar algunas características de los conflictos semióticos: a) se trata de una disparidad de interpretación de una función semiótica que relaciona dos objetos matemáticos (en los ejemplos, dos conceptos o concepto y propiedad); b) más que un tipo de error es una explicación de por qué se produce el error; c) no tiene por qué ser resistente al cambio, como son las concepciones; y d) no tiene por qué tener paralelo en el estudio histórico como son los obstáculos. Puesto que algunos de estos conflictos se encuentran también entre los futuros profesores, pensamos es interesante continuar la investigación dirigida a su identificación.

Los diseños curriculares actuales plantean la enseñanza del muestreo desde la etapa secundaria, por lo que se necesita diseñar situaciones-problemas adecuadas al tema. Para ello podríamos utilizar algunas de las descritas en Begué, Batanero, Gea y Díaz-Levicoy (2019) para iniciar a los estudiantes en la inferencia estadística gradualmente, apoyándose en tareas simples, recursos manipulativos y simulación. Para ello, en primer lugar, se les propone un problema similar al utilizado en este trabajo a los estudiantes y una vez resuelto se discute con ellos las soluciones correctas e incorrectas. Seguidamente, se utilizaría alguno de los numerosos recursos de simulación en Internet que permiten observar y analizar el comportamiento de las muestras. El proceso seguido tiene como finalidad que los estudiantes puedan llegar a superar los conflictos semióticos descritos en este trabajo.

Agradecimiento:

Proyecto PID2019-105601GB-I00 (AEI) y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Begué, N., Batanero, C. y Gea, M. M. (2018). Comprensión del valor esperado y variabilidad de la proporción muestral por estudiantes de educación secundaria obligatoria. *Enseñanza de las Ciencias,* 36(2), 63-79. DOI: 10.5565/rev/ensciencias.2256.

Begué, N., Batanero, C. y Gea, M.M. (2019). Argumentos de los estudiantes de bachillerato en la generación de muestras de la distribucion binomial. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, & E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso International Virtual de Educación Estadística.* Disponible en www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html

Begué, N., Batanero, C., Gea, M.M y Díaz-Levicoy, D. (2019). Distribuciones muestrales: Dificultades en su comprensión y actividades de simulación en poblaciones binomiales. *UNIÓN 100*, 100-108.

Cañizares, M. J. (1997). *Influencia del razonamiento proporcional y combinatorio y de creencias subjetivas en las intuiciones probabilísticas primarias.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Contreras, A., García, M. y Sánchez, C. (2005). Significados institucionales y conflictos semióticos del límite de una función en la educación matemática. *EMA,* 10(2 y 3), 413-439.

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM, 39*(1-2), 127-135.

Gea, M. M., López-Martín, M.M, y Roa, R. (2015). Conflictos semióticos sobre la correlación y regresión en los libros de texto de Bachillerato. *Avances de Investigación en Educación Matemática,* 8*,* 29-49. DOI: https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.113.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 22 (2-3), 237-284.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics,* 39(1), 38-43.

Heitele, D. (1975). An epistemological view on fundamental stochastic ideas. *Educational Studies in Mathematics,* 6(2), 187–205. DOI: https://doi.org/10.1007/BF00302543.

Konold, C. (1989). Informal conceptions of probability. *Cognition and Instruction,* 6, 59-98.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics,* 23, 557-568.

Mayén, S., Díaz, C. y Batanero, C. (2009). Conflictos semióticos de estudiantes con el concepto de mediana. *Statistics Education Research Journal,* 8(2), 74-93.

Mayen, S., Batanero, C., y Díaz, C. (2009). Conflictos semióticos de estudiantes mexicanos en un problema de comparación de datos ordinales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 12(2), 151-178.

MECD. (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato*. Madrid: Autor.

Serrano, L., Batanero, C., Ortiz, J. J. y Cañizares, M. J. (1998). Heurísticas y sesgos en el razonamiento probabilístico de los alumnos de secundaria. *Educación Matemática,* 10(1), 7-25

Shaughnessy, J.M., Ciancetta, M., & Canada, D. (2004). Types of student reasoning on sampling tasks. En M.J. Høines, & A.B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th*

Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol.4, pp. 177-184). Bergen, Noruega: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Tversky, A y Kahneman, D. (1971). Belief in the law of small numbers. *Psychological bulletin,* 76(2), 105.

Estudio exploratorio de la inferencia estadística en las pruebas de admisión a la Universidad en la Comunidad Autónoma Andaluza

María del Mar López Martín[1], Rocío Álvarez-Arroyo[2]

[1]Departamento de Educación, Universidad de Almería

[2]Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

Resumen

La importancia que dentro del aula se da a cada tema recogido en las orientaciones curriculares viene indirectamente determinada por las pruebas de evaluación, especialmente para los estudiantes de Bachillerato, quienes se enfrentan a las Pruebas de Acceso a la Universidad. El objetivo de esta pesquisa es realizar un estudio exploratorio del contenido de inferencia estadística incluidos en las pruebas de admisión a la Universidad en la Comunidad Autónoma Andaluza desde 2003 hasta 2014. La resolución de cada uno de los ejercicios y el análisis semiótico nos ha permitido examinar los objetos matemáticos que intervienen en los problemas y compararlo con el contenido de las directrices curriculares sobre inferencia. Los resultados aquí obtenidos pueden ser considerados tanto para la elaboración de las futuras pruebas como en el proceso de enseñanza-aprendizaje del futuro estudiante universitario.

Palabras clave: Inferencia Estadística, PEvAU, Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales, Significado Evaluado.

1. Introducción

La enseñanza matemática se ha visto fuertemente condicionada por las pruebas de evaluación externas como, por ejemplo, el proyecto PISA, la evaluación TIMSS, las pruebas de diagnóstico o las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU), conocidas en la actualidad como Evaluación final de Bachillerato para el Acceso a la Universidad (PEvAU). Los resultados ofrecidos en muchas ocasiones son preocupantes y esto conlleva que, como investigadores, entremos en un proceso de indagación sobre los factores que pueden ser causa de ese fracaso.

Las mencionadas pruebas PEvAU tienen como finalidad evaluar los conocimientos y capacidades adquiridas por los futuros estudiantes universitarios. La importancia y el impacto que tienen dichas pruebas se ha visto reflejado en los contenidos tratados en el último curso de Bachillerato, por lo que el análisis y estudio de las mismas aportará una gran información sobre la adecuación de los contenidos de estas pruebas. Sin embargo, a pesar de la importancia que ha adquirido en las últimas décadas la inferencia estadística en el Área de Ciencias Sociales, las normativas curriculares de Bachillerato (MEC, 2007; MECD, 2015) incorporan dichos contenidos solamente en el Bloque de Estadística y

Probabilidad incluido en la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II.

Dada la estrecha relación existente entre Bachillerato y las PEvAU, el presente estudio tiene como objetivo principal indagar sobre la adecuación de los contenidos de estas pruebas mediante el análisis de los distintos ítems propuestos en el periodo 2003-2014 en la Comunidad Autónoma Andaluza. Para tal fin se ha realizado una caracterización de los problemas relacionados con inferencia estadística incluidos en las citadas pruebas. Esperamos que esta pesquisa, junto a la desarrollada desde el grupo de investigación de Educación Matemática de la Universidad de Granada (López-Martín, Batanero, Díaz-Batanero y Gea, 2016; López-Martín, Batanero, Gea y Arteaga, 2016), sirva de guía en la planificación y preparación del futuro estudiante universitario.

2. Marco teórico

Dentro del Enfoque Onto-Semiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos, sistema teórico elaborado por Godino, Batanero y Font (2007), se asume como formación epistemológica que las matemáticas provienen de la actividad humana orientada a la resolución de determinados tipos de problemas, los cuales constituyen la razón de ser y significado de los objetos emergentes de la misma. En el EOS los objetos matemáticos, en nuestro caso los objetos relacionados con la inferencia estadística, surgen de las prácticas matemáticas llevadas a cabo en el proceso de resolución de los problemas relacionados con dicho objeto. Mediante la reiteración de las prácticas matemáticas realizadas al resolver muchos problemas similares, se llega a configurar el significado del objeto matemático o conjunto de prácticas asociado al mismo. Por tanto, los problemas propuestos a los estudiantes, bien durante la enseñanza o bien en las pruebas de evaluación, van a incidir directamente en su adquisición de diferentes objetos matemáticos y el significado asignado a dichos objetos, lo que muestra la importancia del análisis de tales problemas.

Los autores del EOS diferencian entre el significado institucional del objeto matemático y el significado personal asociado al mismo. En nuestro caso, el estudio se orienta a determinar el significado institucional de la inferencia estadística en las mencionadas pruebas considerando los significados distinguidos dentro de la institución: 1) significado global, que en nuestro caso corresponde al significado de la inferencia en la propia estadística; 2) significado pretendido, marcado por las orientaciones curriculares; 3) significado implementado, el que se presenta al alumnado en los distintos centros educativos; 4) significado evaluado, correspondiente al contenido de inferencia estadística recogido en las diversas pruebas de evaluación, siendo éste el elemento principal a analizar.

3. Metodología

Para profundizar en si los contenidos de inferencia de las pruebas están directamente relacionados con los recogidos en el currículum de Bachillerato de Ciencias Sociales y el peso relativo que reciben dichos contenidos en el total de la prueba, se analizan los problemas de inferencia formulados en las pruebas cuando ha estado vigente el anterior currículo (MEC, 2007). Para ello, mediante un análisis de contenido, se ha definido una serie de variables que han sido consideradas relevantes para la formación del estudiante en relación a los problemas de inferencia y que se han deducido del estudio de la investigación previa. Asimismo, se ha realizado un estudio longitudinal desde el año 2003 hasta 2014 de las pruebas correspondientes a la asignatura de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II. Cada año se elaboran 6 pruebas con dos opciones de selección excluyentes (opción A u opción B) de las que se selecciona la prueba de junio y septiembre. Cada opción está diseñada con cuatro ejercicios, uno del Bloque de Álgebra, uno del Bloque de Análisis y dos del Bloque de Estadística y Probabilidad. En nuestro caso, nos ceñimos al cuarto ejercicio, pues es el que corresponde a los contenidos de inferencia, lo que genera una muestra de 144 ejercicios en total.

Siguiendo un proceso análisis riguroso y reiterativo se han definido cuatro tipos de variables junto a sus correspondientes categorías.

- V1. *Campo de problema considerado*. La determinación del campo de problema permitirá establecer en gran medida el significado evaluado en las pruebas e indirectamente influirá en el significado institucional pretendido en la enseñanza de la inferencia estadística en el nivel educativo objeto de este estudio. Se han diferenciado tres campos principales de problemas que a su vez se han dividido en dos subcategorías, a excepción los ítems relacionados con contrastes de hipótesis.
  - Muestreo. Esta categoría se ha subdividido a su vez en dos: A1) enumeración de las diferentes muestras de una población; A2) identificación de la distribución muestral de un estadístico o realizar cálculo de probabilidades con la misma.
  - Intervalos de confianza. Los subcampos de problemas en este contenido son: B1) calculo o interpretación de un intervalo de confianza; B2) relación entre confianza, error y tamaño muestral.
  - Contraste de hipótesis.
- V2. *Modelo probabilístico de la población*. Puesto que la inferencia estadística trata de sacar conclusiones de una población en estudio a partir de la información que proporciona una muestra representativa de la misma, es importante saber las características probabilísticas de dicha población. El conocimiento del modelo probabilístico de la población en estudio nos permitirá saber cómo afrontar la estimación de los parámetros, construcción del intervalo de confianza, formulación de los test de hipótesis, etc. Los modelos o distribuciones de probabilidades analizadas han sido: distribución uniforme discreta, distribución binomial y distribución normal (o distribución gaussiana).
- V3. *Parámetro poblacional que debe ser estimado*. Partiendo del supuesto de que la distribución de la población en estudio es conocida, la inferencia paramétrica se centra en realizar inferencias sobre los parámetros desconocidos del modelo probabilístico. En base a los contenidos recogidos en el Real Decreto de educación Secundaria y Bachillerato (MEC; 2007), los parámetros poblacionales a estimar son: la media, la varianza y la proporción.
- V4. *Contexto del problema*. Tenemos en cuenta los contextos recogidos en el *Programme for International Student Assessment* (PISA), organizado por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. Las pruebas de evaluación PISA están orientadas a evaluar la competencia matemática mediante la

resolución de tareas relacionadas con la vida real, por lo que sería deseable que los contextos sugeridos en PISA también se tengan en cuenta en las PEvAU. Por ende, los contextos considerados han sido: personal, profesional, social y científico. Los problemas que carecían de contexto se han clasificado como problemas sin contexto.

4. Resultados

4.1. Campo de problema

El análisis de los diversos problemas desde el punto de vista del tipo de campo de problema pone en relieve la gran variedad y especificidad de objetos matemáticos, implicando distintos grados de dificultad en la realización del mismo. Destacamos el hecho de que todos los campos de problemas propuestos se apoyan fuertemente en la comprensión de la probabilidad condicional, lo que conlleva una mayor dificultad, pues es un concepto en el que se han descrito numerosos sesgos (Díaz, Contreras, Batanero y Roa, 2012; Díaz y de la Fuente, 2005).

En relación al campo de problema de *muestreo*, queda plasmada la necesidad de dominar los distintos muestreos, además de identificar las diferencias existentes entre las técnicas de obtención de una muestra (con o sin reemplazamiento). La determinación de la distribución de probabilidad de las variables muestrales y el cálculo de probabilidades asociadas a las mismas implica la necesidad de tipificar y hacer uso de las tablas de probabilidad.

La construcción del *intervalo de confianza* conlleva, por un lado, la distinción entre parámetros poblacionales y estadísticos muestrales, y por otro, el uso de las tablas estadísticas. Una variante de este problema es la interpretación del resultado obtenido a partir del intervalo, sin embargo, este tipo de actividad supone una complejidad mayor por las dificultades y los errores que giran en torno a la misma (Cumming, William y Fidler, 2004; López-Martín, Batanero y Gea, 2019). Asimismo, el estudio de la relación existente entre la confianza, error de estimación y tamaño muestral, lleva implícito el uso de los objetos matemáticos empleados en la construcción del intervalo de confianza.

Los problemas de *contraste de hipótesis* suponen, en un primer nivel, definir las hipótesis nula y alternativa del parámetro poblacional bajo estudio, tarea que supone ciertas dificultades tanto en estudiantes como en futuros profesores de matemáticas (López-Martín, Batanero y Gea, 2019; Vallecillos, 1999). Aunque de manera general, el desarrollo del procedimiento se realiza de una forma correcta, generalmente debido a la mecanización del mismo, la conclusión e interpretación del resultado obtenido supone una dificultad extra, pues son varios los estudios que revelan las dificultades y errores que se comenten (López-Martín, Batanero y Gea, 2019).

Dado que la mayoría de los problemas de las pruebas PEvAU contiene más de un aparatado, se han clasificado en las distintas categorías un total de 270 actividades. Del análisis se ha comprobado una alta presencia de problemas sobre construcción e interpretación del intervalo de confianza (31,5%), seguidos con un mismo porcentaje de los problemas en los que se solicita relacionar los elementos de un intervalo de confianza. Los problemas de contrastes de hipótesis aparecen en menor proporción, pues solo formaron parte de las pruebas en los cuatro últimos años de los 12 años analizados (véase Figura 1). Este cambio de tendencia implica el aumento de la dificultad de la prueba, pues autores como Fidler y Cumming (2005) indican que la comprensión de los intervalos es más sencilla que la de los contrastes, tanto para estudiantes como para investigadores. Sin embargo, destacamos el hecho de que la implantación del nuevo currículo ha supuesto la eliminación de dicho contenido.

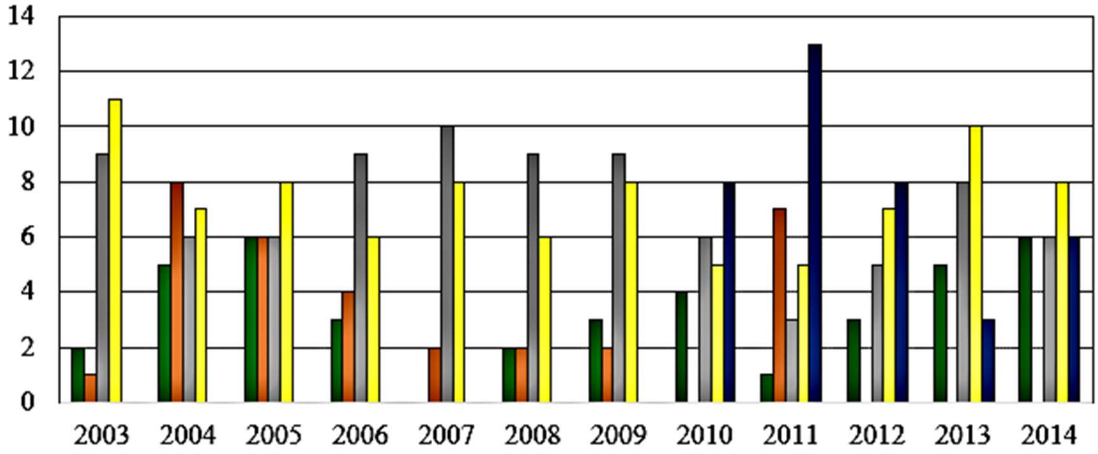


Figura 1. Clasificación por años según los campos Población y Muestra, (A1, verde); Distribución Muestral (A2, naranja); Intervalo de confianza (B1, gris); Relación entre confianza, error y tamaño (B2, amarillo); y Contraste de Hipótesis (C, azul)
Fuente: hecho por los autores

4.2. Modelo probabilístico de la población

Los resultados del análisis reflejan la transcendencia de la Distribución Normal (59%), siendo considerada bajo estudio todos los años. Aunque no se indica explícitamente, destacamos la presencia de la Distribución Binomial (26%) a partir del año 2006, implicando la necesidad de identificar el valor de la varianza poblacional y recordar las condiciones requeridas para aproximar un modelo binomial a uno normal. La distribución uniforme, aunque aparece con un porcentaje menor (15%), se ha observado en todos los años analizados, a excepción del 2007, y siempre está relacionada con problemas de muestreo.

4.3. Parámetro poblacional a estimar

Adquiere gran relevancia la media poblacional (65%) y se pone de manifiesto el papel tan insignificante que tiene la estimación de la varianza poblacional (2%), pues solamente se contempló en un ejercicio en 2004 y otro en 2005. La incorporación de la Distribución Binomial implica la aparición de la estimación de la proporción poblacional, por lo que, tal y como se ha comentado anteriormente, dicho parámetro se contempla en las pruebas diseñadas a partir de 2006 (33%).

4.4. Contexto

El estudio de esta variable nos permite analizar la conexión entre los conceptos y las situaciones reales, dando sentido al aprendizaje por parte del alumnado. Se observa que aproximadamente el 29% están referidas a situaciones sociales (situaciones relacionadas con su comunidad), mientras que el resto de los contextos suponen un 20%. Destacamos el hecho de que, aunque un 21% son problemas que carecen de contexto, estos han sido propuestos en su mayoría hasta 2010. Esta predisposición de contextualizar los problemas refleja la importancia de seguir las actuales recomendaciones de la enseñanza de la estadística que hacen hincapié en dotar de contexto las tareas matemáticas.

5. Conclusiones

El análisis llevado a cabo refleja la gran variedad de objetos sobre inferencia estadística que se ponen en juego. Este tipo de estudio, junto a los ya realizados dentro del seno del Grupo de Investigación, pone de manifiesto la necesidad de asegurar una correcta transmisión de dichos contenidos por parte de los docentes encargados de dicha labor. Es importante señalar que este trabajo es de carácter exploratorio, pues el objetivo de esta investigación no es extrapolar los resultados a otras pruebas diferentes a las analizadas. Esperamos que los resultados obtenidos pueden servir para conjeturar hipótesis provisionales sobre el contenido de inferencia estadística en las pruebas realizadas en otros años o en otras comunidades autónomas, aportando resultados que serían útiles para los especialistas universitarios que forman parte de las Comisiones Coordinadoras de las pruebas de acceso a la Universidad.

Referencias

Díaz, C., Contreras, J. M. Batanero, C., & Roa, R. (2012). Evaluación de sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional en futuros profesores de educación Secundaria. *Bolema 26*(22), 1207-1226.

Díaz, C., & de la Fuente, I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, *59,* 245-260.

Cumming, G., Williams, J., & Fidler, F. (2004). Replication and researchers' understanding of confidence intervals and standard error bars. *Understanding statistics, 3*(4), 299-311.

Fidler, F., & Cumming, G. (2005). Teaching confidence intervals: Problems and potential solutions. In *Proceedings of the 55th Session of the International Statistical Institute* (pp. 1-5). Voorburg: International Statistical Institute. Online: iase-web.org/documents/papers/isi55/Fidler-Cumming.pdf.

Godino, J. D. Batanero, C., & Font, V. (2007). The Onto-Semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 27-135.

López-Martín, M.M., Batanero, C., Díaz-Batanero, C., & Gea, M. (2016). La inferencia estadística en las Pruebas de Acceso a la Universidad en Andalucía, *Revista Paranaense de Educação Matemática, 5*(8), 33-59.

López-Martín, M. M., Batanero, C., & Gea, M. M. (2019). ¿Conocen los futuros profesores los errores de sus estudiantes en la inferencia estadística? *Bolema*, *33*(64), 672-693

López-Martín, M. M., Batanero, C., Gea, M., & Arteaga, P. (2016), Análisis de los problemas de inferencia propuestos en las Pruebas de Acceso a la Universidad en Andalucía, *Vidya, 36*(2), 409-428.

MEC, Ministerio de Educación y Ciencia (2007). *Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del Bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas.* Madrid: Autor.

MECD, Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Autor.

Vallecillos, A. (1999). Some empirical evidence on learning difficulties about testing hypotheses. In *Proceedings of the 52 session of the International Statistical Institute* (Vol.2, pp. 201–204). Helsinki: International Statistical Institute.

Interpretación de intervalos de confianza: estudio exploratorio con alumnado preuniversitario

Antonio Francisco Roldán López de Hierro[1], Rocío Álvarez-Arroyo[2]

[1]Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Granada
[2]Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

Resumen

El concepto de "intervalo de confianza" puede ser abordado desde diversos puntos de vista, los cuales dan lugar a interpretaciones diferentes de los resultados obtenidos empíricamente. Estas concepciones no siempre son conocidas por el alumnado que se enfrenta a estos contenidos, lo que supone una limitación para su aprendizaje. En el presente trabajo mostramos los resultados obtenidos tras llevar a cabo un estudio acerca de la compresión e interpretación mostradas por alumnado que aún no ha accedido a la universidad sobre los diversos factores que intervienen durante el aprendizaje de los principales aspectos relacionados con intervalos de confianza. Esta investigación se implementó mediante un cuestionario formado por seis ítems de opción múltiple y por una cuestión libre. Entre sus principales deducciones cabe destacar la necesidad de plantear una metodología docente que contemple trasladar al alumnado las distintas interpretaciones del intervalo de confianza para una mejor comprensión global del mismo.

Palabras clave: Intervalo de confianza, comprensión, significado, interpretación frecuencial, interpretación bayesiana.

1. Introducción

Analizar la comprensión mostrada por el alumnado de los diferentes cursos académicos acerca de las nociones matemáticas y estadísticas que debemos utilizar en nuestras tareas diarias es uno de los campos de investigación que más atención está acaparando actualmente en el campo de la Educación Matemática. Cuando el profesor es capaz de inferir la realidad de los razonamientos realizados por los estudiantes a la hora de afrontar tareas matemáticas, éste puede desarrollar prácticas discursivas que orienten al alumnado hacia los significados institucionales que se pretenden alcanzar. De esta forma el docente interviene de forma significativa en el proceso de aprendizaje como una orientación hacia el camino más adecuado.

La experiencia docente de los autores en el ámbito de la docencia en Educación Secundaria y Bachillerato nos llevó a interesarnos por el concepto de intervalo de confianza. A pesar de que puede parecer, en apariencia, relativamente sencillo, la verdad es que el tema de intervalos de confianza, e incluso la inferencia estadística en general, generan en el alumnado dificultades de aprendizaje que se pueden observar tras un simple análisis. Aparte de los errores que surgen de manera natural en el propio cálculo del intervalo (cuestión resuelta definitivamente por la tecnología de que disponemos hoy en día), la interpretación que realiza el estudiantado acerca de la noción de "intervalo de confianza" es una de las dificultades más notables que pueden ser detectadas en este campo de estudio. En muchas ocasiones, estas "malinterpretaciones" provienen del desconocimiento de los diferentes significados que podemos atribuir al concepto de intervalo de confianza bajo distintos puntos de vista. Este desconocimiento también puede detectarse entre el propio profesorado especialista en materia de estadística.

En esta contribución exponemos un estudio realizado entre el alumnado de segundo curso de Bachillerato de dos institutos distintos de Educación Secundaria y Bachillerato de la provincia de Granada (España) acerca de la interpretación que realiza el estudiantado con respecto a la noción de "intervalo de confianza". Se trata de un estudio exploratorio, pues únicamente describimos los resultados que hemos observado y que, en principio, no pueden ser extrapolados a una población más general. A lo largo del presente trabajo se han detectado tanto dificultades que ya habían sido puestas de manifiesto en investigaciones anteriores como dificultades que no habían sido comentadas en los trabajos previos sobre el tema. El lector interesado puede encontrar más detalles sobre los contenidos de esta investigación en Roldán López de Hierro (2019).

2. Diferentes concepciones de la noción de intervalo de confianza

En muchas ocasiones podemos considerar que los valores observados en una población siguen una distribución de frecuencias que depende de uno o varios parámetros. Sin embargo, cuando la población es muy amplia, estos parámetros poblacionales suelen ser desconocidos. Surge así el problema de estimación, que puede afrontarse de forma puntual o mediante el uso de intervalos. Existen diversas concepciones sobre el concepto de *intervalo de confianza*. Entre ellas cabe destacar las tres que presentamos a continuación, donde abordaremos el caso concreto del intervalo de confianza que puede calcularse para la estimación de la media de una población normal.

- Interpretación *frecuencial*: el intervalo de confianza se calcula a través de una expresión teórica con la condición de que si se toma una cantidad enorme de muestras aleatorias independientes y se determinan los intervalos de confianza asociados a dichas muestras, se podrá comprobar que, al menos, una proporción igual o mayor que el *nivel de confianza* contienen al verdadero valor de la media poblacional (aunque, en los casos prácticos que se plantean en la realidad, dicho número es desconocido).
- Interpretación en *remuestreo*: el intervalo de confianza agrupa a una familia de valores razonables que pueden servir para representar la media de la población. De esta forma, si se toman diversas muestras aleatorias, las respectivas medias muestrales obtenidas a partir de éstas volverán a caer dentro del intervalo concreto.
- Interpretación *bayesiana*: según esta visión, el intervalo de confianza calculado para estimar la media poblacional es un intervalo, cuyo centro se sitúa en la media muestral, con la propiedad de que la probabilidad de que la media poblacional se sitúe en dicho intervalo (por lo menos, con anterioridad al cálculo práctico del mismo) es igual a un cierto número previamente fijado que se conoce como *nivel de confianza*.

No pretendemos opinar acerca de la validez de uno u otro punto de vista. Todos son interesantes y pueden ser adoptados en cada situación concreta según las características de la experimentación a realizar. Sin embargo, debemos comentar que la interpretación que se enseña al alumnado de Bachillerato en España se basa, fundamentalmente, en la interpretación frecuencial. Además, ponemos de manifiesto los siguientes aspectos: en primer lugar, consideramos que es conveniente que el alumnado conozca estos tres puntos de vista acerca de la interpretación del intervalo de confianza pues, en caso contrario, se imposibilita su experimentación propia en contextos reales con el objetivo de detectar la concepción que mejor modeliza la realidad del experimento que se está llevando a cabo; y en segundo lugar, este desconocimiento conlleva la imposibilidad de hacer una interpretación acorde a los propios puntos de vista.

3. Antecedentes

Podemos creer que en el campo de la Didáctica de la Matemática deben existir ya muchas investigaciones sobre el tema de la interpretación del concepto de intervalo de confianza por el alumnado de diferentes niveles educativos. Sin embargo, no es ésta la realidad.

Las primeras investigaciones sobre este problema abierto tomaron, como punto de partida, a investigadores que habían desarrollado estudios empíricos, publicados en revistas de impacto, en los que se utilizaban intervalos de confianza para fundamentar las conclusiones obtenidas (por ejemplo, véase Cumming, William y Fidler, 2004). A pesar de que se les podía presuponer un alto nivel de conocimiento en este campo, lo cierto es que los resultados de las encuestas mostraron ciertas limitaciones a la hora de interpretar los intervalos de confianza que ellos mismos habían obtenido, presentándose entre ellos la interpretación en remuestreo de forma predominante. Este hecho ya había sido detectado por Estes (1997) en una proporción superior al 80%.

El grupo más numeroso de investigaciones en este campo de estudio se han llevado a cabo utilizando alumnado universitario, tanto antes como después de acabar sus respectivos grados. Un primer estudio en este sentido fue realizado por Behar (2001), quien empleó una muestra de 297 estudiantes de ingeniería. Entre sus conclusiones cabe destacar que casi la mitad del alumnado interpretaba el nivel de confianza como el porcentaje de datos poblacionales que estaban contenidos en el intervalo de confianza. Además, otro porcentaje cercano al 50% realizaba una interpretación bayesiana del intervalo de confianza. En un estudio posterior, Yáñez y Behar (2009) destacaron las enormes dificultades mostradas por el alumnado a la hora de interpretar la influencia de diversos factores sobre la amplitud del intervalo de confianza.

Finalmente, hay estudios acerca de esta cuestión utilizando muestras de profesorado en formación dentro del campo de las matemáticas. En una serie de trabajos consecutivos, López-Martín, Batanero y Gea (2019a, 2019b) utilizaron una muestra de 70 estudiantes de máster para evaluar el grado de conocimiento de los mismos respecto a este tema. Sólo un 28% de ellos proporcionaron una interpretación adecuada de un intervalo de confianza construido previamente. Además, un 11% del alumnado indicó una visión determinista del mismo al afirmar que el intervalo que se había dado debía contener el verdadero valor del parámetro, aspecto que ya había detectado Olivo (2008). Las mismas autoras se preguntaron acerca de la capacidad de estos mismos estudiantes de máster para anticipar las dificultades que podrían manifestar sus propios alumnos cuando se les propusiese resolver una cuestión relacionada con intervalos de confianza que ya había sido planteada con anterioridad en las pruebas de acceso y admisión a la universidad, que arrojaron un total de 195 errores que fueron clasificados en cuatro categorías.

4. Desarrollo de la investigación

El estudio exploratorio se basó en el análisis de las respuestas dadas por 58 estudiantes matriculados en la asignatura "*Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II*" que se imparte en el segundo curso de Bachillerato (último curso preuniversitario en España). Ésta es la única asignatura que aborda contenidos relacionados con la inferencia estadística en la etapa preuniversitaria. En concreto, lo hace después de analizar las distribuciones en el muestreo de la media y de la proporción. Los estudiantes que participaron en el estudio pertenecían a dos institutos diferentes de la provincia de Granada, uno de ellos situado en la capital y otro en su periferia (si bien es cierto que el instituto de la capital recibe una importante proporción de alumnado que vive en pueblos de los alrededores de la capital). El alumnado fue seleccionado por estar matriculado en los mencionados institutos en la única rama de Bachillerato que aborda contenidos relacionados con el intervalo de confianza. Por ello, al no haber sido seleccionada al azar dentro de una población más amplia, la muestra era intencional, lo que convierte este estudio en exploratorio.

Se aplicó un cuestionario formado por seis preguntas de opción múltiple, en las que se encontraban cuatro posibles respuestas con una o dos de ellas correctas, y una cuestión de desarrollo libre, en la que el alumnado podía mostrar sus conocimientos acerca del intervalo de confianza para la media y su cálculo. Cada interrogante buscaba indagar en la comprensión manifestada por el estudiantado acerca del intervalo de confianza respecto de uno o dos aspectos prácticos. Utilizamos algunas preguntas que ya habían sido propuestas en Cruise, Dudley y Thayer (1984), adaptándolas a la notación empleada en su aula. También nos inspiramos en el amplio cuestionario elaborado por Olivo (2008) y, finalmente, propusimos algunas preguntas de elaboración propia, como la siguiente:

> «*Se sabe que la altura media μ de los pinos de una zona forestal muy amplia es de 6.5 metros. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera?*
> A. *Un posible intervalo de confianza para μ es [6.25, 8.4].*
> B. *Un posible intervalo de confianza para μ es [6.75, 8.4].*
> C. *Cualquier intervalo de confianza para μ que calculemos, asociado a una muestra aleatoria cualquiera, debe contener al valor 6.5.*
> D. *En este contexto, no tiene sentido determinar el intervalo de confianza ya que se conoce la altura media de todos los pinos.*»

El objetivo fundamental que perseguíamos al plantear esta cuestión era determinar si el alumnado había asimilado la razón última del problema de la estimación por intervalos de confianza: hacer una estimación de un parámetro desconocido. Por consiguiente, cuando este parámetro es conocido a priori, carece de sentido desarrollar la técnica operativa que lleva al cálculo del intervalo de confianza, aun cuando tengamos datos muestrales. De esta forma, la opción correcta es el apartado D.

Sólo el 36.2% del alumnado proporcionó la opción correcta. La mayoría del alumnado optó por el distractor C (un 39.7%), lo cual nos lleva a las siguientes conclusiones: de una parte, el alumnado basa su estudio en el procedimiento mecánico que proporciona el intervalo de confianza, sin atender lo suficiente a su interpretación y al significado global que se le atribuye; de otra parte, el alumnado tiene presente que, dado que la media muestral siempre está contenida en el intervalo de confianza (en concreto, es su centro), también debe contener a la media poblacional (hecho que no ocurre en ocasiones). Este error ya fue observado tanto por Behar (2001) como por Olivo (2008).

Los distractores A y B pretendían medir la reacción del alumnado ante intervalos de confianza ya calculados, uno de ellos conteniendo al valor 6.5 y el otro no. No obstante, ninguno de ellos tenía al número 6.5 como centro, lo cual podía disuadir al alumnado de su posible elección. A pesar de ello, la opción A fue elegida por el 17.2% del alumnado y el distractor B por el 8.6%. Esta confusión entre valores muestrales y poblacionales fue previamente descrita por Olivo et al. (2008), donde un 25% de sus estudiantes de ingeniería se equivocaban al distinguir entre las nociones de estadístico y parámetro.

Tras el recuento y el posterior análisis de las respuestas aportadas por el alumnado a nuestro cuestionario, se procedió a la representación gráfica de los datos obtenidos. Como se muestra en la Figura 1, en la que se ha representado la distribución del número de respuestas correctas (entre un máximo de 9 posibles, ya que había tres cuestiones con una opción correcta y tres preguntas con dos opciones correctas), los resultados obtenidos fueron, globalmente, muy pobres.

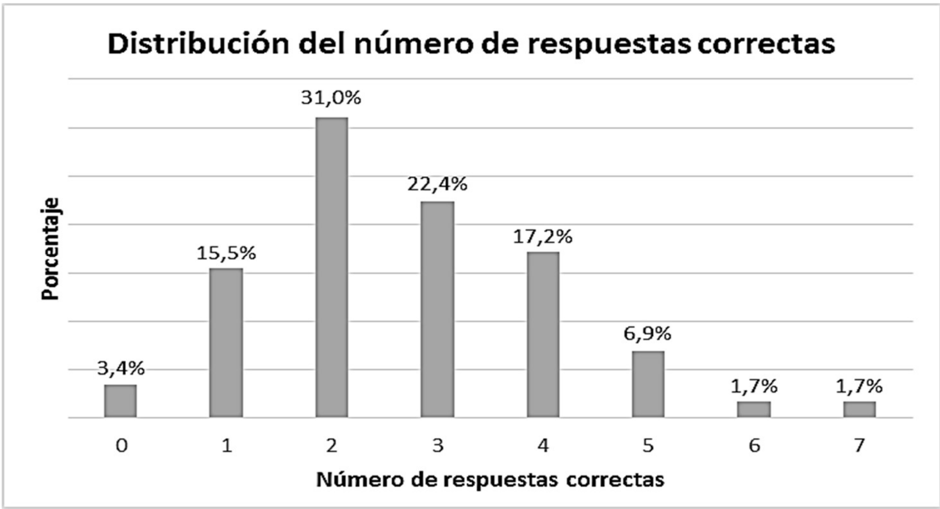


Figura 1. Distribución del número de respuestas correctas.
Fuente: hecho por los autores

Una de las partes más importantes del trabajo consistió en la detección de las dificultades mostradas por el estudiantado a través del análisis de sus respuestas incorrectas. Muchos de estos conflictos semióticos habían sido ya detectados en investigaciones anteriores, bien como errores cometidos (López-Martín et al., 2019a) o bien como posibles equivocaciones en que puede incurrir el alumnado (López-Martín et al., 2019b). Entre ellos, podemos resaltar los siguientes:

- Considerar que el intervalo de confianza posee extremos constantes.
- No distinguir entre probabilidad de que el parámetro caiga en el intervalo y nivel de confianza.
- Creer que un aumento del tamaño de la muestra provoca un aumento en la anchura del intervalo de confianza.

Otras equivocaciones no habían sido puestas de manifiesto en estudios previos, por lo que constituyen aportaciones originales del presente trabajo.

Entre ellas, resaltamos las siguientes:

- Creer que existen intervalos de confianza que no contienen a la media muestral.
- Asumir que la media muestral influye en la anchura del intervalo de confianza.
- Afirmar que la media muestral puede situarse en un extremo del intervalo.
- No establecer relación alguna entre las nociones equivalentes de "intervalo más estrecho" e "intervalo más preciso".

La conclusión más importante del estudio es la necesidad de formar a los docentes (actuales y futuros) acerca de las diferentes interpretaciones del intervalo de confianza, aun restando tiempo al cálculo numérico del mismo. Esto proporcionaría al alumnado una perspectiva más adecuada de la inferencia estadística en su conjunto y mejoraría los procesos de resolución e interpretación de problemas. También se propone la elaboración de hojas de cálculo o uso de applets que permitan generar muestras aleatorias, ayudando a comprender la interpretación frecuencial del intervalo de confianza.

Referencias

Behar, R. (2001). *Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña.

Cruise, R., Dudley, R. y Thayer, J (1984). *A resource guide for introductory statistics*. Nueva York: Kendall/Hunt.

Cumming, G., Williams, J. y Fidler, F. (2004). Replication, and researchers' understanding of confidence intervals and standard error bars. *Understanding Statistics*, 18(3), 299-311. doi: 10.1111/j.1467-9280.2007.01881.x

Estes, W. K. (1997). Significance testing in psychological research. Some persisting issues. *Psychological Science* 8(1), 18-20.

López-Martín, M. M., Batanero, C. y Gea, M. M. (2019a). Prospective high school teachers' interpretation of hypothesis tests and confidence intervals. En CERME 11, Utrecht, Febrero, 2019.

López-Martín, M. M., Batanero, C. y Gea, M. M. (2019b). ¿Conocen los futuros profesores los errores de sus estudiantes en inferencia? *Bolema 33*(64), 672-693.

Olivo, E. (2008). *Significados del intervalo de confianza en la enseñanza de la ingeniería en México*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.

Olivo, E., Batanero, C. y Díaz, C. (2008). Dificultades de comprensión del intervalo de confianza en estudiantes universitarios. *Educación Matemática, 20*(3), 5-32.

Roldán López de Hierro, A. F. (2019). *Un análisis exploratorio de la comprensión del intervalo de confianza por estudiantes de Bachillerato*. Trabajo Fin de Máster, Universidad de Granada. Disponible en: *https://digibug.ugr.es/handle/10481/59619*

Yáñez, G. y Behar, R. (2009). Interpretaciones erradas del nivel de confianza en los intervalos de confianza y algunas explicaciones plausibles. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XIII,* Santander: SEIEM.

Interpretación de gráficos estadísticos de dos distribuciones de datos por estudiantes de secundaria. Análisis exploratorio.

Israel García-Alonso
Universidad de La Laguna

Resumen

Los medios de comunicación durante esta emergencia mundial informan sobre el avance de la pandemia mediante gráficos estadísticos con varias distribuciones de datos. En este trabajo analizamos cómo resuelven tareas con información dada mediante gráficos de este tipo estudiantes de secundaria. Como resultados encontramos que, aunque hay estudiantes que interpretan correctamente la información dada de esta forma, un grupo importante lee los gráficos sin integran la información dada en los gráficos o bien hacen interpretaciones basadas en su propia experiencia. También es destacable que algunos estudiantes son incapaces de abordan la tarea propuesta con estos gráficos. Consideramos que es importante seguir estudiando cómo mejorar la enseñanza de gráficos de varias distribuciones de datos conjuntos pues, sin duda, son gráficos muy habituales en los medios de comunicación.

Palabras clave: gráficos estadísticos, estadística cívica, gráficos

1. Introducción

Durante este año hemos vivido el avance de una pandemia mundial que nos ha obligado a cerrar centros educativos, así como prorrogar eventos de carácter científico, lo que ha provocado la movilización del ingenio y de la creatividad para tratar de paliar las dificultades que esta situación enfrenta al mundo educativo. Los docentes han tenido que tomar decisiones sobre cómo afrontar con sus estudiantes la continuidad del aprendizaje a distancia: "Las fronteras tradicionales entre las prácticas de repente cambian. Nuevas fronteras aparecen: distancia física y dificultades de comunicación y de acceso" (Bakker y Wagner, 2020, p. 2).

También hemos presenciado en estos meses cómo la sociedad ha tenido que mantenerse informada en todo momento, acerca del avance de la pandemia y las consecuencias que esta va produciendo, a medida que se propaga por los diferentes países. Esta información se ha ofrecido, principalmente haciendo uso de herramientas estadística, y más concretamente, mediante el uso de gráficos estadísticos. No en vano, "la representación gráfica es una herramienta útil para comunicar aspectos de una distribución a la vez que facilita focalizar aspectos de los datos que se pueden perder con el uso de la estadística descriptiva solamente" (Leavy, 2006, p. 90). En este sentido, en los últimos años, la investigación en Educación Estadística se ha preocupado por analizar las dificultades que puede ofrecer la lectura e interpretación gráfica y la ha caracterizado adoptando diferentes niveles de lectura e interpretación (Aoyama y Stephens, 2003; Batanero et al., 2013; Curcio, 1987; Friel, Curcio y Bright, 2001). Así, Curcio (1987) y Friel et al. (2001)

describieron los siguientes niveles de lectura: Leer los datos, Leer entre los datos, Leer más allá de los datos y Leer detrás de los datos

La lectura e interpretación de los datos en clave estadística exige que el ciudadano no deba sólo poseer cultura estadística, entendida como la competencia necesaria para comprender la información estadística que se ofrece (Gal, 2002), sino que debe identificar y manejar ciertas características especiales que presentan las estadísticas sobre fenómenos sociales, en lo que se denomina *estadística cívica*, es decir, cuando la estadística "se centra en cuestiones de relevancia social para la sociedad" (Engels, 2019, p. 3). Dos características propias de la estadística cívica, descritas por este mismo autor, son *datos agregados y datos dinámicos*, relacionados con la forma en que agrupan los datos cuando se presentan y la regularidad con la que han sido recopilados.

Investigaciones recientes ponen de manifiesto que, aún los estudiantes de nivel universitario tienen dificultades ante preguntas que requieren comparar gráficos estadísticos y que se sitúan en el nivel básico "Leer los datos" (Bolch y Jacobbe, 2019, p. 9), por lo que estos autores sugieren que se tenga en cuenta en la instrucción y se revisen conceptos básicos de representaciones gráficas.

Todo esto nos lleva a plantearnos la pregunta de investigación siguiente: Cuando se propone una tarea matemática a estudiantes de secundaria en la que se presenta la información mediante gráficos estadísticos que representan dos distribuciones de datos, ¿cómo leen e interpretan esta información cuando responden a dicha tarea?

2. Marco conceptual

Los gráficos estadísticos son objetos semióticos que requieren del dominio de elementos matemáticos para su lectura (Arteaga, Batanero, Contreras y Cañadas, 2015), y diferentes autores han analizado y estudiado cómo se accede a ellos, describiendo diferentes niveles de lectura de gráficos estadísticos (y tablas estadísticas), según el grado de competencia adquirido (Curcio, 1987; Friel et al., 2001), indicados anteriormente. Por su parte, Bolch y Jacobbe (2019) nos señalan que es necesario que los estudiantes consigan los tres niveles de comprensión de gráficos estadísticos de Curcio para desarrollar la cultura estadística y las habilidades de pensamiento en los estudiantes (p. 3).

Las investigaciones también nos advierten que la forma en que se accede a un gráfico difiere entre un experto o un estudiante novel. Así, los expertos tienden a ver los gráficos de forma global mientras que los estudiantes noveles parecen centrarse en aspectos locales del gráfico (Khalil, 2005). En este sentido, investigaciones más recientes, como las de Konold, Higgins, Russell y Khalil (2014), muestran que los estudiantes se centran en casos individuales del gráfico (p.e., el valor menor) y rara vez obtienen la información del gráfico de forma agregada, con lo que no se fijan en la distribución entera.

Consideramos que es conveniente estudiar con detalle y caracterizar las respuestas que los estudiantes ofrecen cuando leen e interpretan gráficos estadísticos que muestran la información simultánea de dos distribuciones de datos o bien cuando es necesario estudiar conjuntamente dos gráficos y construir nueva información para dar respuesta a la tarea.

3. Metodología

Realizaremos un análisis exploratorio de las respuestas dadas por los estudiantes ante gráficos estadísticos que provienen de dos distribuciones de datos diferentes y que se presentan de forma que se requiere utilizar la información de ambas distribuciones con la que crear nueva información y relevante para resolver la tarea.

Analizamos las respuestas dadas por 110 estudiantes del tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria (14-15 años) que completaron un cuestionario de elaboración propia que tiene por objeto desarrollar dos tareas de uso e interpretación de gráficos estadísticos. Estos estudiantes se distribuían en tres centros educativos públicos de Tenerife (Islas Canarias). Este instrumento, así como los resultados de los niveles de lectura obtenidos por los estudiantes de secundaria se pueden encontrar en los trabajos publicados en García-Alonso y Bruno (2019).

En esta ocasión profundizamos en cómo abordan el análisis e interpretación de los gráficos ofrecidos y estableceremos unas categorías acerca de las respuestas dadas, atendiendo a cómo han gestionado la información que se muestra en el gráfico.

Las categorías del estudio serán las siguientes:

- Lectura e interpretación conjunta de los datos. En este caso los estudiantes acceden a la información dada en los gráficos de forma global, próximo a como lo haría un experto (Khalil, 2005).
- Lectura e interpretación independiente de los datos. En este caso consideramos que los estudiantes sólo reconocen uno de los gráficos o bien analizan cada una de las distribuciones de datos como gráficos diferentes, sin conectar la información entre sí. Mostraría una competencia de lectura e interpretación próxima a un estudiante novel, que no observa la globalidad (Khalil, 2005; Konold et al. 2014).
- Respuestas basadas en su experiencia. En ocasiones los estudiantes dan respuestas a la tarea sin hacer uso de la información dada en los gráficos. Catalogamos aquí las respuestas dadas de esta forma.

4. Datos y discusión

PREGUNTA 1. La primera pregunta ofrece un diagrama poligonal (Figura 1) acerca de la evolución en Canarias y en España del uso del móvil por niños de 10 a 15 años. Ambas evoluciones aparecen en el mismo gráfico.

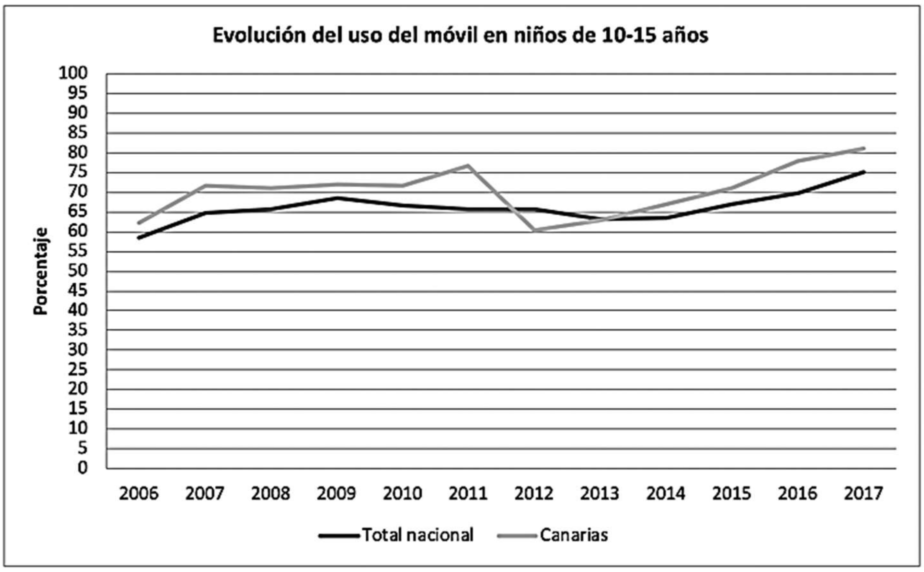


Figura 1. Diagrama correspondiente a la pregunta 1
Fuente: García-Alonso y Bruno (2019)

Ante esta tarea hemos encontrado diferentes formas de abordar la lectura e interpretación de los gráficos.

A. *Análisis independiente de las poligonales*. Los estudiantes realizan un análisis por separado de cada una de las gráficas, explicando lo que sucede en Canarias y posteriormente lo que sucede en España, siguiendo la poligonal correspondiente. Analizando la respuesta dada al estudio individual de la gráfica, observamos que los estudiantes muestran una interpretación que podría situarse en niveles altos. Pero este gráfico así planteado busca, entre otros objetivos, que se realice una lectura de la evolución de ambos conjuntos de datos de forma conjunta. Los estudiantes que responden sólo siguiendo la información de una gráfica, no muestran esta nueva información en su lectura. Por esa razón diríamos que se sitúan en un nivel básico de acercamiento a esta gráfica.

B. *Análisis combinado de las poligonales*. Aquí los estudiantes han sido capaces de indicar, al menos que los datos de Canarias están por encima de los datos nacionales. Esta información es una nueva y sólo se puede apreciar en este tipo de representaciones combinadas, lo que muestra un nivel de lectura más elevado.

C. *Respuestas en base a su experiencia*. Hay un conjunto de estudiantes que no es capaz de interpretar la información que se ofrece en el gráfico y basa su respuesta en elementos subjetivos acerca de su conocimiento del uso del móvil o bien no precisan ningún aspecto concreto de la gráfica que permita identificar si sólo se fija en una de ellas o bien lo hace comparándolas.

En general, observamos que la mayoría de los estudiantes al describir la gráfica no acceden a ella de manera que transfieran la información nueva que ofrece este tipo de gráfico. La mayor parte de los estudiantes o bien estudia cada gráfica por separado o hace una interpretación basada en su experiencia sin hacer intervenir la gráfica.

PREGUNTA 2. La segunda pregunta ofrece dos diagramas de barras diferentes (Figura 2), pero que, según el contexto de la tarea, se relacionan de manera consecutiva, es decir, se debe comenzar leyendo la información del primer diagrama y se completa la información con la lectura del segundo diagrama de barras. En este caso, las gráficas, a pesar de estar bajo el mismo contexto y referirse a las mismas compañías telefónicas, presentan diferente información y distinta escala en el eje vertical.

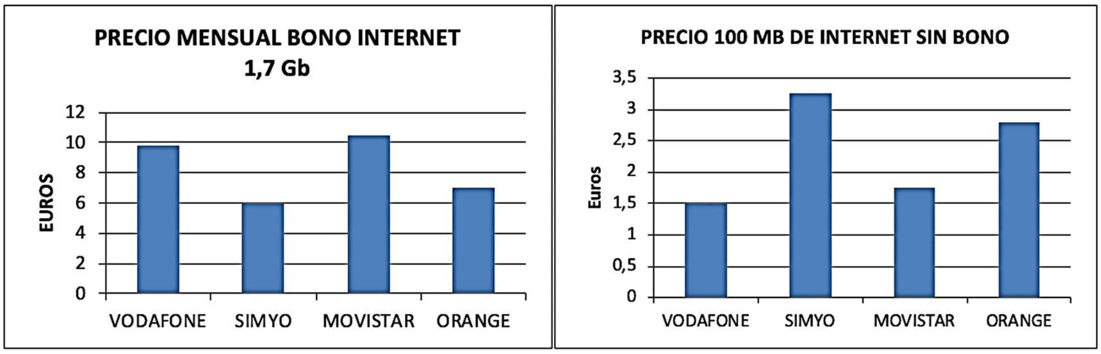


Figura 2. Diagrama correspondiente a la pregunta 2
Fuente: García-Alonso y Bruno (2019)

Ante esta tarea los estudiantes mostraron diferentes tipos de respuesta:

a. *Análisis independiente de los diagramas de barras*. Hay estudiantes que, al igual que en el caso anterior, realizan una lectura de las gráficas por separado, o bien sólo estudia una de las gráficas e ignora la otra. Algunos estudiantes se centran en buscar la compañía telefónica que resulte más barata sin tener en cuenta que el bono no sea suficiente o bien indicando que se ajuste al mismo, realizando algunas operaciones que sustenten esta afirmación.

b. *Análisis combinado de los diagramas de barras*. Menos de la mitad de los estudiantes analizados realizan la lectura conjunta de las dos gráficas. Si bien es cierto que no todos ellos llegan a dar la respuesta correcta a la tarea propuesta, pues son pocos los estudiantes que realizan los cálculos necesarios para resolver la tarea (García-Alonso y Bruno, 2019).

c. *Suman los datos de los diagramas de barras*. Un pequeño grupo de estudiantes sumaron los datos de las compañías que se muestran en ambos diagramas de barras para obtener un único dato y resolver con él la tarea. Estos estudiantes demuestran tener bajo conocimiento numérico, gráfico y contextual, así como necesidad de clausura de los datos. Error poco frecuente en este estudio pero que puede provenir de dificultades de comprensión que van más allá de la lectura gráfica.

d. *Respuestas en base a su experiencia*. Este último caso, detectamos de nuevo una respuesta basada en su propia experiencia y no en el contexto propuesto. La mayoría de los estudiantes de esta categoría no realizaron ninguna operación.

En la tabla 1 se recogen las respuestas analizadas en cada categoría.

Tabla 1. Frecuencia (y porcentaje) en cada categoría de respuesta

	Pregunta 1	Pregunta 2
Análisis combinado de las gráficas	45 (41)	48 (43,6)
Análisis individual de las gráficas	37 (33,6)	32 (29)
Suma de los datos	-	6 (5,4)
Respuestas en base a su experiencia	26 (23,6)	13 (12)
No contestan	2 (1,8)	11 (10)

Fuente: Propia del autor

5. Conclusiones

Hemos analizado las respuestas de los estudiantes de educación secundaria cuando se enfrentan a dos tareas que presentan la información utilizando gráficos estadísticos de dos distribuciones de datos que deben combinar para ofrecer nueva información a partir de ellos. Hemos categorizado las respuestas dadas por los estudiantes.

Observamos que, ante este tipo de tareas hay un grupo de estudiantes que integra correctamente los gráficos en su interpretación y desarrollan una lectura e interpretación de estos gráficos estadísticos cercano a como lo haría un experto. Pero aún así, existe un grupo importante de estudiantes que interpreta realiza una lectura de los gráficos de forma independiente, de manera que no han sido capaces de realizar un estudio global y comparado entre los datos (ejercicio 1) o bien, no han integrado la información dada en los dos gráficos (ejercicio 2). Este segundo tipo de tarea, hemos observado que ha resultado más compleja para los estudiantes de secundaria, pues uno de cada diez no es capaz de responder a la tarea. Ha sido muy llamativo que un grupo de estudiantes haya necesitado sumar los gráficos estadístico del ejercicio 2, para dar respuesta a la tarea planteada. Consideramos que esta necesidad de clausura de los datos debe ser objeto de análisis en futuras investigaciones.

Como indicamos al principio, vivimos en un mundo en el que los datos continuamente vienen dados en forma de gráficos en los medios de comunicación y estos, en ocasiones, aglutinan varias distribuciones de datos. Es importante que los ciudadanos conozcan e interpreten los datos propios de la estadística cívica. Hemos observado que la información así presentada no resulta sencilla para los estudiantes de secundaria pues, en este análisis, cerca del 25% de los estudiantes o no respondían a la tarea planteada o daban respuestas sin utilizar la información dada, sólo basándose en su experiencia y otro 30% de los estudiantes no conjugaba bien la información dada.

Consideramos que no sólo es necesario sino urgente abordar el estudio sobre la comprensión de gráficos estadísticos que representen más de una serie de datos si queremos ciudadanos que sean capaces de actuar y modificar hábitos en la sociedad de la información que vivimos. Pues todo ciudadano necesita comprender ideas y conclusiones estadísticas, para enriquecer tanto su vida profesional como personal (Wild, Utts y Horton, 2018, p. 16) y, en este sentido, es necesario desarrollar una formación que permita la resolución de problemas en contextos inmersos en la sociedad de forma que desarrolle ciudadanos críticos y capaces de adoptar decisiones para su vida y su entorno cercano.

Referencias

Aoyama, K. y Stephens, M. (2003). Graph interpretation aspects of statistical literacy: A Japanese perspective. *Mathematics Education Research Journal,* 15(3), 207-225.

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J.M. y Cañadas, G.R. (2015). Statistical graphs complexity and Reading levels: a study with prospective teachers. *Statistique et Enseignement,* 6(1),3-23

Bakker, A. y Wagner, D. (2020). Pandemic: lessons for today and tomorrow? *Educational Studies in Mathematics*, 104, 1-4.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J.M. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números,* 83, pp. 7-18.

Bolch, C. A. y Jacobbe, T. (2019). Investigating levels of graphical comprehension using the LOCUS assessment. *Numeracy* 12(1). Article 8. DOI: 10.5038/1936-4660.12.1.8

Curcio, F.R. (1987). Comprehension of mathematical relationships expressed in graphs. *Jorunal for Research in Mathematics Education.* 18 (5), 382-393.

Engel, J. (2019). Statistical literacy and society. What is civic statistics? En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística*.

Friel, S.N., Curcio, F.R. y Bright, G.W. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education,* 32(2), 124-158. DOI: https://doi.org/10.2307/749671

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: meanings, component, responsabilities. *International Statistical Review,* 70(1), S. 1-51.

García-Alonso, I. y Bruno, A. (2019). Razonabilidad numérica en respuestas estadísticas. En J.M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.* Disponible en: https://www.ugr.es/~fqm126/civeest/garcia_bruno.pdf

Khalil, K.A.I. (2005). *Expert-novice differences: visual and verbal responses in a two-group comparison task*. (Unpublished Master Thesis). University of Massachusetts. USA.

Konold, Higgins, Russell y Khalil (2014). Data seen through different lenses. *Educational Studies in Mathematics.* 88(3), 305-325. DOI: 10.1007/s10649-013-9529-8

Leavy, A. (2006). Using data comparison to support a focus on distribution: examining preservice teachers' understandings of distribution when engaged in statistical inquiry. *Statistics Education Research Journal,* 5(2), 89-114.

Wild, C.J., Utts, J.M. y Horton, N.J. (2018). What is statistics? En D. Ben-Zvi, K. Makar y J. Garfield (Eds.), *International Handbook of Research in Statistics Education* (pp. 5-36). Cham, Suiza: Springer.

Debilidades y fortalezas de los psicólogos en formación sobre el conocimiento de intervalos de confianza

Rocío Álvarez-Arroyo[1], Antonio Francisco Roldán López de Hierro[2], Gustavo R. Cañadas[1], Mª del Mar López-Martín[3]

[1]Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada

[2]Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Universidad de Granada

[3]Departamento de Educación, Universidad de Almería

Resumen

Aunque la estimación por intervalos es la herramienta más recomendada dentro de la inferencia estadística, la literatura científica pone de manifiesto la diversidad de errores y dificultades en torno a ellos. La psicología es un campo científico en el que la estimación por intervalos tiene una presencia manifiesta y puede ser utilizada con mayor éxito, si bien no existe una trayectoria de investigación en este campo lo suficientemente amplia. Por ello este estudio pretende valorar los puntos fuertes y débiles que tienen los psicólogos en formación en cuanto a su conocimiento sobre los intervalos de confianza. Tras examinar las respuestas de 56 estudiantes de psicología a un cuestionario de 17 ítems, los resultados señalan como punto fuerte su conocimiento de la determinación del intervalo en sí, pero muestran una débil comprensión de su interpretación y de sus propiedades. Quizá esto plantea la necesidad de un cambio en la metodología de enseñanza que consiga mejorar la comprensión del alumnado de psicología y, por extensión, del universitario.

Palabras clave: dificultades, inferencia, intervalos de confianza, psicología, universidad.

1. Introducción

Los intervalos de confianza nacen como respuesta al problema inductivo de obtener (por estimación) una información acerca de una población a raíz únicamente de los datos reales de una muestra tomada de dicha población. Existen otras soluciones de inferencia estadística a este problema, como son los contrastes de hipótesis, pero son varias las fuentes que recomiendan el uso y reporte de los intervalos de confianza por encima de otros métodos estadísticos (APA, 2010; Caballo, Salazar y García-López, 2006), y más aún en el campo de la psicología, como es el caso que nos ocupa en este estudio.

Sin embargo, a pesar de la importancia que tiene el uso de los intervalos de confianza en informes de carácter científico, son varias las investigaciones que han puesto de manifiesto la existencia de errores y dificultades en relación a este objeto matemático (véanse los antecedentes descritos en este trabajo). No obstante, existe poca investigación al respecto en el campo de la psicología a pesar de que esta herramienta estadística es de patente presencia en dicho ámbito. Por ello, el objetivo de este estudio es valorar los puntos fuertes y débiles que tienen los psicólogos en formación respecto al conocimiento de los intervalos de confianza para poder así arrojar algo de luz sobre el enfoque que debe tomar su enseñanza a nivel universitario.

2. Fundamento teórico

En base a los fundamentos de la teoría de los significados de Godino y Batanero (1998) y el modelo de comprensión en educación matemática de Godino (1996), decimos que un alumno comprende el significado de "intervalo de confianza" cuando es capaz de realizar correctamente las distintas prácticas que configuran su significado institucional.

Para convenir entonces el significado institucional de intervalo de confianza hacemos uso de la visión frecuentista del mismo, de entre las varias interpretaciones que puede tener (Roldán López de Hierro y Álvarez-Arroyo, 2020), pues es la enseñada al alumnado universitario en España. Por tanto, el *intervalo de confianza* es aquel que estima el valor de un parámetro poblacional (θ) mediante un estadístico muestral de inferencia, el cual tendrá éxito en un porcentaje (1-α, llamado nivel de confianza) de muestras tomadas de esa población, existiendo una desviación (σ) del estimador con respecto al parámetro.

3. Antecedentes

Desde finales del siglo XX, la comunidad científica ha ido detectando determinados errores relacionados con los intervalos de confianza. Estas dificultades se han puesto de manifiesto tanto en estudiantes de distintos niveles académicos como en investigadores que han usado los propios intervalos de confianza en sus pesquisas, e incluso se han encontrado errores en libros de texto o instructores en la materia (Haller y Krauss, 2002). Algunos de estos errores y dificultades asociados a los intervalos de confianza que ha revelado la comunidad científica son:

- Errores en la interpretación de los intervalos de confianza:
  - Considerar el intervalo de confianza como estadístico descriptivo, ignorando su naturaleza inferencial (Fidler, 2005; Fidler y Cumming, 2005; Yáñez y Behar, 2009).
  - Interpretar el intervalo como un rango de valores plausibles para algún parámetro muestral, como un rango de valores individuales o como un rango de valores individuales dentro de una desviación estándar (Fidler, 2005; Kalinowski, 2010).
- Errores en las relaciones entre los distintos conceptos matemáticos que intervienen en la construcción del intervalo de confianza:
  - Pensar que la amplitud del intervalo o bien aumenta o bien no se ve afectada por el aumento del tamaño de muestra, e incluso desconocer si existe relación entre ambos aspectos (Behar, 2001; Fidler y Cumming, 2005; Kalinowski, 2010; Roldán López de Hierro, Batanero y Álvarez-Arroyo, 2020).
  - Debilidad conceptual para expresar la relación entre amplitud del intervalo y el grado de confianza, pensando que a medida que el nivel de confianza (1-α) aumenta, la amplitud del intervalo disminuye (Behar, 2001; Fidler, 2005; Kalinowski, 2010; Olivo y Batanero, 2007; Olivo, Batanero y Díaz, 2008).
  - Interpretación bayesiana del nivel de confianza, creyendo erróneamente que éste representa la probabilidad de que el intervalo contenga los valores de las medias

muestrales (Olivo *et al*., 2008; Vallecillos, 1998; Yáñez y Behar, 2009), o asumiendo que el parámetro poblacional está contenido en el intervalo de confianza con una probabilidad del 100(1-α)% (Fidler, 2005; Thompson, 2006).

- Débil comprensión acerca de las distribuciones muestrales, como la creencia de que la distribución subyacente del intervalo es uniforme, siendo más propensos a interpretar los intervalos de forma dicotómica (Kalinowski, 2010); o aunque perciban que los promedios de muestras más grandes se acercan más a la media de la población, no comprendan las implicaciones de esto sobre la variabilidad de la media muestral (Weel, Pollatsek y Boyce, 1990).

4. Desarrollo de la investigación

El presente estudio exploratorio se llevó a cabo mediante el análisis de las respuestas dadas por 56 estudiantes universitarios de la titulación de Psicología a un cuestionario dado. En el momento de realizar el cuestionario, estos estudiantes se encontraban cursando la asignatura de "Técnicas de análisis en la investigación psicológica", de primer curso en la Universidad de Granada. Es la primera asignatura donde abordan el tema de la inferencia estadística y los intervalos de confianza, aunque es cierto que llegan con algunas nociones sobre ello de su etapa preuniversitaria, pues generalmente son estudiantes que proceden del Bachillerato de Ciencias Sociales, donde se aborda el tema.

El cuestionario aplicado a la muestra se compone de 17 ítems de respuesta cerrada extraídos todos ellos de Olivo (2008). Los ítems son de opción múltiple, con 4 opciones posibles y solo una de ellas correcta. Los ítems fueron seleccionados con el fin de tratar todos los contenidos sobre intervalos de confianza que los estudiantes de la muestra habían abordado en su asignatura, como son: la definición de intervalo de confianza; la relación entre la amplitud del intervalo y el tamaño de la muestra, el nivel de confianza o la varianza; el significado de nivel de confianza (variación del intervalo en diferentes muestras); estimar la media de una población bajo diferentes circunstancias (población normal o en una muestra grande con σ conocida, para una población aproximadamente normal con σ desconocida, o para una población a partir de datos experimentales de una muestra grande con σ desconocida); y estimar la varianza.

En base a los resultados obtenidos, que se muestran en la Figura 1, puede decirse en primer lugar que el porcentaje de respuesta fue alto, pues tan solo un 13% de las preguntas no fueron contestadas por los alumnos. Además, de manera general, los resultados manifiestan que el conocimiento que tiene este alumnado sobre intervalos de confianza es bueno, pues la media por cuestionario fue de 10 aciertos, 5 fallos y 2 ítems dejados en blanco.

Si bien es cierto que un 58,8% de las respuestas fueron correctas, se observa una interesante variabilidad en ellas, oscilando entre el 94,6% (i13) y el 5,4% de acierto (i12). Esto indica que no todos los contenidos presentan la misma dificultad para el alumnado. Concretamente, los mejores resultados se obtuvieron en los ítems dedicados a la estimación de la media poblacional (ítems i13, i15, i14 con más del 82% de respuestas correctas), es decir, cuestiones donde el alumno debe conocer y aplicar la fórmula y el procedimiento de cálculo de un intervalo de confianza, con independencia de que σ sea conocida o no. Hay que señalar que cuando se trata de la estimación de la varianza (i17), el porcentaje de acierto baja hasta el 58,9%, pero sigue estando en el promedio de acierto.

Este resultado puede deberse a que en el aula se le da más importancia a la media, dedicando menos tiempo al estudio de la varianza.

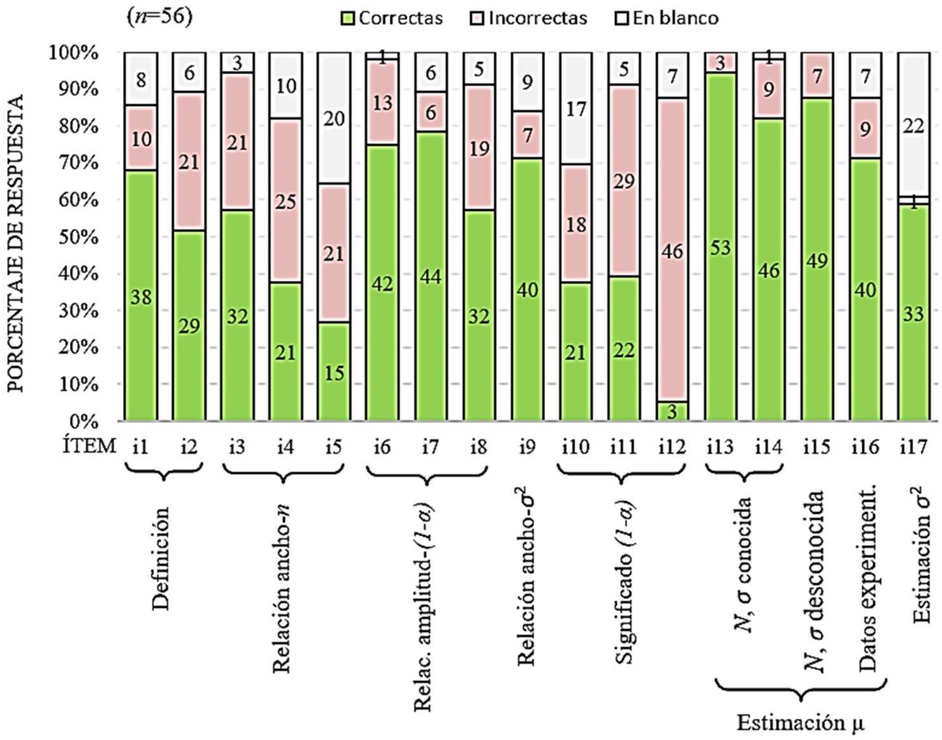


Figura 1. Porcentaje y frecuencia de respuestas correctas (verde), incorrectas (rosa) y no contestadas (blanco) en cada ítem, organizados por contenido
Fuente: hecho por los autores

Sin embargo, los ítems donde se aborda el significado del nivel de confianza (i12, i10, i11) o la relación entre la amplitud del intervalo y el tamaño muestral (i5, i4) son los que obtuvieron los peores resultados, con un rango de acierto inferior al 40% y llegando incluso al 5,4% para el ítem que presentó mayor dificultad (i12). Estos resultados ponen de manifiesto que el alumnado, a pesar de ser perfectamente capaz de calcular un intervalo de confianza o conocer su definición, no llega a comprender e interpretar correctamente el significado de éste ni de los factores que en él intervienen.

Un ejemplo de ello es el ítem i12, donde se apreciaron errores ya descritos por otros autores (López-Martín, Batanero y Gea, 2018; Olivo & Batanero, 2007; Olivo *et al.*, 2008; Vallecillos, 1998), pues el 41% de la muestra dio al intervalo una interpretación bayesiana, mientras que otro 41% creyó que el intervalo se refiere a la media muestral en lugar de a la media poblacional.

También observamos gran dificultad en los ítems i4 e i5, propuestos para evaluar el efecto del tamaño de muestra sobre la amplitud o precisión del intervalo, donde la mayoría del alumnado (en torno a 2/3) no supo predecir o determinar tal efecto. Estos resultados son similares a los obtenidos por Olivo (2008) para estudiantes de ingeniería, con la salvedad de que en nuestro caso un porcentaje considerable de los psicólogos en formación (36%) optó por una cuarta opción del ítem i5 no incluida en el ítem original ("Ninguna de las respuestas anteriores es correcta"), lo que denota, como mínimo, un desconocimiento sobre la existencia de alguna relación entre ambos parámetros.

5. Conclusión

A la luz de lo expuesto, esta investigación pone de manifiesto que aún queda camino por recorrer en cuanto al aprendizaje de los estudiantes de psicología sobre intervalos de confianza, aun cuando es un tópico valioso para su formación. En líneas generales, el alumnado sí presenta capacitación para la determinación de intervalos de confianza bajo diferentes circunstancias. Sin embargo, encuentra una importante limitación en cuanto a la interpretación y las propiedades del mismo, como pueden ser el significado del nivel de confianza dentro de la visión frecuentista o la relación que guarda éste o el tamaño muestral con la amplitud del intervalo. Esto invita a reflexionar sobre la necesidad de un cambio o mejora de la enseñanza de la inferencia y, más concretamente, de los intervalos de confianza, limitando quizá el tiempo dedicado a procedimientos de cálculo para invertirlo en la interpretación de aquellos y el significado e interrelación de todos los elementos matemáticos que lo integran.

Referencias

APA. (2010). *Publication Manual of the American Psychological Association* (6th ed.). Washington, DC.

Behar, R. (2001). *Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza-aprendizaje de la estadística*. Universitat Politècnica de Catalunya.

Caballo, V. E., Salazar, I. C., & García-López, L. J. (2006). Normas para la publicación de artículos en Psicología Conductual: actualización, sugerencias y recomendaciones. *Psicología Conductual*, *14*(1), 129-148.

Fidler, F. (2005). *From statistical significance to effect estimation: Statistical reform in psychology, medicine and ecology.* University of Melbourne.

Fidler, F., & Cumming, G. (2005). Teaching Confidence Intervals: Problems and Potential Solutions. En *ISI 2005 : the 55th Session of the International Statistical Institute*. Sydney.

Godino, J. D. (1996). Mathematical concepts, their meanings and understanding. En L. Puig & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 417-425). University of Valencia.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area for research in mathematics education. En A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Haller, H., & Krauss, S. (2002). Misinterpretations of Significance: A Problem Students Share with Their Teachers? *Methods of Psychological Research - Online*, *7*(1), 1-20.

Kalinowski, P. (2010). Identifying misconceptions about confidence intervals. En C. Reading (Ed.), *8th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 8)* (p. 4). Ljubljana, Slovenia: International Association of Statistical Education (IASE).

Olivo, E. (2008). *Significado de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México*. Universidad de Granada.

Olivo, E., & Batanero, C. (2007). Un estudio exploratorio de dificultades de comprensión del intervalo de confianza. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *12*, 37-51.

Olivo, E., Batanero, C., & Díaz, C. (2008). Dificultades de comprensión del intervalo de confianza en estudiantes universitarios. *Educación Matemática*, *20*(3), 5-32.

Roldán López de Hierro, A. F., & Álvarez-Arroyo, R. (2020). Interpretación de intervalos de confianza: estudio exploratorio con alumnado preuniversitario. En C. R. Campos, A. P. Perin, & S. Samá (Eds.), *Investigações Hispano-Brasileiras em Educação Estatística*. Taubaté, SP, Brasil: Akademy.

Roldán López de Hierro, A. F., Batanero, C., & Álvarez-Arroyo, R. (2020). Conflictos semióticos relacionados con el intervalo de confianza en estudiantes de Bachillerato e Ingeniería engineering students. *Educação Matemática Debate*, *4*(e202010), 1-25. https://doi.org/10.24116/emd. e2020 10

Thompson, B. (2006). Research Synthesis: Effect Sizes. En J. L. Green, G. Camilli, P. B. Elmore, A. Skukauskait, & E. Grace (Eds.), *Handbook of Complementary Methods in Education Research* (pp. 583-603). Mahwah, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates Publishers. https://doi.org/10.4324/9780203874769.ch3

Vallecillos, A. (1998). Experimental study on the learning of the significance level concept. En L. Pereira-Mendoza, L. Seu Kea, T. Wee Kee, & W. Wong (Eds.), *Proceedings of the 5th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS-5)* (pp. 1475-1476). Singapore: Nanyang Technological University.

Weel, A. D., Pollatsek, A., & Boyce, S. J. (1990). Understanding the Effects of Sample Size on the Variability of the Mean. *Organizational Behavior and Human Decision Processes*, *47*(2), 289-312. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0749-5978(90)90040-G

Yáñez, G., & Behar, R. (2009). Interpretaciones erradas del nivel de confianza en los intervalos de confianza y algunas explicaciones plausibles. En M. J. González, M. T. González, & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XIII Simposio de la SEIEM* (p. 14). Santander.

Dificultades del profesorado de Educación Secundaria para fomentar la alfabetización estadística

Laura Muñiz-Rodríguez, Luis J. Rodríguez-Muñiz
Universidad de Oviedo

Resumen

El objetivo de esta investigación es detectar las dificultades del profesorado de Educación Secundaria para fomentar la alfabetización estadística, mediante una actividad formativa y evaluadora en la que participaron catorce docentes en ejercicio. Tras una fase de formación que promovió la reflexión metacognitiva sobre su propia práctica docente en relación con la alfabetización estadística, se desarrolló un grupo de discusión como técnica cualitativa para la recogida de datos. La temática de la actividad abarcó diversos elementos relacionados con la alfabetización estadística clasificados en torno a tres bloques: la ciencia de datos, los recursos didácticos, y las orientaciones metodológicas. A partir de los resultados, se concluye la necesidad de promover métodos y recursos alternativos que permitan al profesorado abordar la alfabetización estadística de acuerdo con las demandas actuales.

Palabras clave: alfabetización estadística, dificultades, educación secundaria, profesorado.

1. Introducción

El profesorado juega un papel decisivo en el desarrollo de las competencias relacionadas con la alfabetización estadística, ya que solo alfabetizando estadísticamente se puede formar un alumnado con capacidad crítica para interpretar y valorar los datos que le rodean y convertirlos en información. A este respecto, la Comisión Europea (2019) ha impulsado recientemente el Plan de lucha contra la desinformación con la intención de concienciar a la sociedad, y por ende al alumnado, sobre la necesidad de confrontar la cantidad ingente de información que recibimos cada día. La consecución de este reto requiere, tal y como subrayan Batanero y Díaz (2011), el empleo de bases de datos reales y cercanos al contexto del alumnado, de herramientas digitales, y de la simulación como herramienta de familiarización con la aleatoriedad.

Pese a que los docentes reconocen la importancia práctica de la estadística, también admiten encontrar ciertas dificultades durante su enseñanza para identificar qué conceptos pueden ser estudiados a partir de los datos, para decidir qué software utilizar para fomentar la comprensión de determinados conceptos estadísticos, o para diseñar una actividad que promueva la interpretación de gráficos (Batanero, 2009). A pesar de los avances, la investigación en este tema requiere mayor profundización. Por ello, este trabajo tiene como objetivo identificar las dificultades del profesorado de matemáticas de Educación Secundaria para fomentar la alfabetización estadística. Otro objetivo derivado del anterior consiste en indagar qué metodologías y recursos didácticos emplea dicho profesorado para la enseñanza de la estadística, para así poder dar un soporte más particularizado a sus necesidades y adaptado a los retos de la sociedad actual.

2. Marco teórico

Gal (2002) define la alfabetización estadística como la capacidad para interpretar, evaluar críticamente, discutir y comunicar información estadística, argumentos relacionados con datos o fenómenos aleatorios en diversos contextos. Esta definición es ampliada por Batanero, Díaz, Contreras y Roa (2013), quienes hablan de sentido estadístico como la aleación entre la cultura estadística, basada en la idea de alfabetización estadística propuesta por Gal (2002), y el razonamiento estadístico, que toma por referente el modelo de Wild y Pfannkuch (1999) concebido a partir de cuatro dimensiones: el ciclo de investigación, los tipos de pensamiento, el ciclo de interrogación, y las disposiciones. Ahora bien, considerando los elementos que componen esta noción, ¿cómo puede el profesorado promover la alfabetización estadística? Durante la Educación Secundaria, Moore (1999) propone dirigir la atención a la terna Datos – Análisis – Conclusiones del ciclo de investigación, de tal forma que el alumnado comprenda qué gráficos son útiles en cada contexto, qué patrones típicos buscar, y qué medidas numéricas o modelos matemáticos son apropiados.

En esta línea, los principios y estándares del NCTM (2000) enfatizan las habilidades relacionadas con el análisis de datos, siendo el estándar recomendable la formulación de preguntas que puedan ser respondidas mediante la recolección, organización, presentación e interpretación de datos, a través de métodos estadísticos apropiados. Completando el enfoque anterior, la American Statistical Association provee un marco para la educación estadística basado en seis recomendaciones que, como novedad, aluden a la promoción del aprendizaje activo y al uso de la tecnología para desarrollar la comprensión de los conceptos y el análisis de datos, además del desarrollo de la alfabetización estadística y del pensamiento estadístico, el uso de datos reales, el fomento de la comprensión de conceptos más que de procedimientos, y el uso de la evaluación para mejorar y valorar el aprendizaje del alumnado (Blanco, 2018).

Asimismo, la alfabetización de datos o *data literacy* ha cobrado especial relevancia en el ámbito educativo en los últimos años, en paralelo al desarrollo de la ciencia de datos, como espacio de concurrencia de la estadística y la computación (Schield, 2004), de tal modo que la OCDE (2019) señala esta alfabetización como uno de los objetivos de la Agenda 2030, subrayando su relación con la interpretación, organización y presentación de datos con el fin de darles sentido y convertirlos en información.

Con el propósito de mostrar al profesorado una visión actualizada de los parámetros que a nivel internacional definen la alfabetización estadística, la actividad formativa y evaluadora desarrollada contempla las recomendaciones previas en cuanto a: la naturaleza y representación de los datos, los recursos didácticos con utilidad directa (aplicaciones, entornos virtuales, materiales manipulativos, juegos), y las orientaciones metodológicas (la estadística por proyectos para la promoción del aprendizaje activo).

3. Metodología

La actividad, en la que participaron catorce docentes de matemáticas de Educación Secundaria en ejercicio, se desarrolló en tres sesiones divididas en dos fases cada una.

En la primera fase, de naturaleza formativa, un ponente experto proporcionó a los participantes una visión directa sobre cómo fomentar la alfabetización estadística, con el objetivo de activar la reflexión sobre su propia práctica, focalizar la atención del profesorado sobre el tema expuesto, y dar a conocer recursos para fomentar la alfabetización estadística en el aula, como técnicas de manipulación y visualización de datos, situaciones de uso próximas al alumnado, metodologías basadas en el aprendizaje por proyectos, la interdisciplinariedad, o el trabajo en grupo.

La componente evaluadora se desarrolló durante la segunda fase, permitiendo a los participantes reflexionar sobre sus dificultades para fomentar la alfabetización estadística en relación con el contenido trabajado en la fase anterior. Para ello, se utilizaron técnicas cualitativas de recogida de datos basadas en grupos de discusión, articuladas a partir de dos métodos de moderación: la dinámica Metaplan® (2015) y la aplicación web Mentimeter®. Ambos métodos permiten obtener de manera organizada a través de diferentes elementos gráficos información compartida en el seno de un grupo que busca generar ideas y soluciones, desarrollar opiniones y acuerdos, o formular objetivos y planes de acción. La Figura 1 ilustra los contenidos tratados en la actividad y su relación con los fundamentos teóricos anteriormente expuestos.

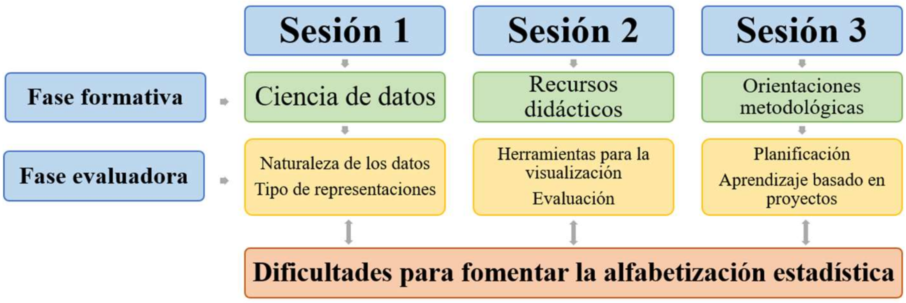


Figura 1. Estructura de los contenidos tratados en la actividad
Fuente: hecho por los autores

Ambos métodos permiten centrar la discusión en torno a un esquema de preguntas previamente definidas cuya naturaleza permitió responder al objetivo propuesto, además de conocer los recursos didácticos y las orientaciones metodológicas empleadas por el profesorado para la enseñanza de la estadística. Una característica común a ambos es la transparencia y el atractivo que otorgan a la discusión, puesto que el resultado es una imagen de las ideas gestadas en el grupo y del apoyo que cada una recibe (Figura 2). La principal diferencia radica en el formato y las herramientas que se utilizan.

Figura 2. Método Metaplan® (a la izquierda) y Mentimeter® (a la derecha)
Fuente: hecho por los autores

Metaplan® (2015) requiere agrupar a los participantes. Al hilo de cada pregunta planteada por el moderador, se inicia un proceso de lluvia de ideas dentro de cada grupo, durante el cual cada participante expone sus propias opiniones sobre el tema. Cada idea, sea esta unánime o individual, debe ser anotada en una tarjeta autoadhesiva. Pasados unos minutos, el moderador recoge las tarjetas y las fija en un tablón, organizándolas por categorías. Antes de pasar a una nueva pregunta, las respuestas a la anterior son comentadas en gran grupo, pudiendo surgir nuevas reflexiones.

Mentimeter® es una aplicación web para diseñar presentaciones que permiten la retroalimentación de los participantes en tiempo real. En este caso, los participantes responden a nivel individual las preguntas planteadas por el moderador mediante un dispositivo móvil. Una vez obtenidas las respuestas, los resultados se muestran mediante una representación gráfica, en función del tipo de pregunta. Antes de pasar a una nueva pregunta, los resultados son comentados en el seno del grupo.

4. Resultados

El primer tema de discusión giró en torno a los datos que el profesorado utiliza en la enseñanza de la estadística. En cuanto a su naturaleza, y de manera unánime, predominan bases de datos académicos, demográficos, personales y sociales. Dentro del ámbito social, se comentan algunos ejemplos como los datos de consumo, deportivos o de ocio. El uso de datos electorales o de PISA aparece de manera puntual. En cuanto a la fuente de origen, destaca el libro de texto, los medios de comunicación e Internet. En menor medida se utilizan bases de datos compartidas por instituciones públicas como los ayuntamientos, el Instituto Nacional de Estadística o la UNESCO. De forma aislada, aparecen el uso de encuestas por parte del alumnado para la obtención de datos o la generación de datos aleatorios mediante una calculadora o una hoja de cálculo.

El uso que se hace de estos datos se rige por lo establecido en el currículo, predominando tanto la elaboración de tablas y gráficos como el cálculo de parámetros, quedando al margen la interpretación, el análisis de la variabilidad, o la discusión de los resultados, procesos clave de la alfabetización estadística. En la elaboración de tablas y gráficos, se hace notoria la presencia de tablas de frecuencias, histogramas, diagramas de sectores, diagramas de cajas, y diagramas de dispersión. Los participantes aseguran fomentar cambios entre representaciones, siempre de una tabla a un gráfico, o viceversa, nunca entre distintos tipos de gráficos, y justifican que el uso y representación que se hace viene determinado por el enfoque que predomina en el libro de texto.

El segundo tema de discusión se centró en los recursos didácticos. La respuesta unánime fue la calculadora y la hoja de cálculo, si bien algún profesor utiliza alguna aplicación informática de manera puntual. A raíz de la escasez detectada, tanto en número como en variedad, se decidió indagar más en este problema, intentando detectar sus posibles causas. Por un lado, se percibe cierta reticencia a profundizar en el uso de recursos tecnológicos por la escasa o nula evaluación que se hace de la competencia adquirida por el alumnado. Por otro lado, se identifican algunas dificultades referidas no solo a la falta de disponibilidad de tales recursos, sino también de espacios, coordinación y tiempo para su uso, y a la escasa formación que tiene el profesorado sobre la existencia de otros recursos y su adecuación en función de los conceptos estadísticos que se pretenden enseñar. Como factores externos, señalan la poca flexibilidad del currículo en consonancia con la presión recibida por ajustarse a su contenido, además de la baja calidad del producto final elaborado por el alumno, aspecto que desmotiva a muchos.

En relación con el tercer tema de discusión, los enfoques metodológicos más utilizados se refieren al empleo del libro de texto, al trabajo en grupo, al uso de encuestas, la experimentación, el uso de juegos, en particular de azar, y el aprendizaje basado en proyectos. De manera esporádica aparece el empleo de situaciones cotidianas, la elaboración de informes, los materiales manipulativos, y la generación de debates. Además, el 44% de los participantes asegura contar con menos recursos metodológicos de los que necesita para fomentar la alfabetización estadística del alumnado.

En línea con las orientaciones metodológicas que según Alsina (2019) deberían guiar la enseñanza de la estadística, se pidió al profesorado participante que valorase de 1 (En absoluto) a 5 (En gran medida) la medida en que plantea retos al alumnado y preguntas para que expliquen, argumenten y justifiquen sus acciones, relaciona el aprendizaje de la estadística y la probabilidad con otras áreas de las matemáticas y con otras áreas del conocimiento, y fomenta la interacción entre el alumnado. La Figura 2 muestra los valores medios para cada una de estas acciones, así como una estimación de la función de densidad. Se pidió también que valorasen, utilizando la misma escala, la medida en que se trabaja cada uno de los procesos del ciclo de investigación estadística propuesto por Wild y Pfannkuch (1999), obteniendo estos valores para la media: 3 en la búsqueda de problemas, 2.9 en la formulación de hipótesis, 2.9 en la recogida de datos, 4.1 en la organización de datos, 3.7 en el análisis de datos, y 4 en la interpretación de datos.

Dado el peso que se le otorga en la literatura al aprendizaje basado en proyectos para la enseñanza de la estadística (Batanero y Díaz, 2011), y a consecuencia de la fase de formación ofrecida al respecto, se decidió profundizar en este enfoque metodológico. Tan solo un 36% de los participantes emplea esta metodología para enseñar estadística. Entre las razones expuestas para no hacerlo destacan la falta de tiempo y de formación, así como la falta de coordinación entre materias, la falta de iniciativa, el tamaño de los grupos, la falta de motivación del alumnado, y la dificultad de evaluar el aprendizaje.

También se pidió al profesorado que valorase la adecuación de su formación para fomentar la alfabetización estadística del alumnado, obteniendo que un 21% la considera muy poco o poco adecuada, un 29% adecuada, y un 50% bastante o muy adecuada. El grupo comenta que la formación es escasa y voluntaria, y destaca tres aspectos a reforzar: conocimiento y manejo de recursos didácticos, orientaciones sobre el diseño de secuencias didácticas, y formación en didáctica de la estadística.

Desde la perspectiva de los discentes, la falta de motivación, de autonomía, de interés, la complejidad de la notación, el lugar de la estadística en la programación didáctica, la formalización, y la resolución de problemas son las principales dificultades encontradas.

5. Conclusiones

La actividad formativa y evaluadora desarrollada permitió identificar las dificultades del profesorado de Educación Secundaria para fomentar la alfabetización estadística. Los resultados corroboran que algunos docentes emplean bases de datos, recursos didácticos y orientaciones metodológicas que no se ajustan a las recomendaciones actuales (ASA, 2005, Batanero et al., 2011; Blanco, 2018; OCDE, 2019). En relación con los datos, si bien estos son pertinentes y reales, parecen no ser un estímulo para el alumnado. Contextos de mayor interés, como el análisis de datos deportivos, de redes sociales o de incidencia y propagación de enfermedades deberían ser el punto de partida del proceso de alfabetización (Batanero y Díaz, 2011). El uso y representación que se hace de los datos también debe cambiar. El currículo contemporáneo únicamente considera como herramientas para la visualización de datos gráficas clásicas, como el gráfico de barras o de sectores, y se minusvalora la importancia de la competencia digital asociada a la alfabetización estadística (Batanero y Díaz, 2011), obviando que la construcción manual de las gráficas estadísticas se limita al contexto escolar. La consecución de la alfabetización estadística pasa por que el alumnado sea capaz de emplear herramientas tecnológicas para la elaboración e interpretación de gráficas presentes en su vida cotidiana, como un mapa de calor, una gráfica de puntos, una nube de términos o un árbol jerárquico, y por introducir en el entorno escolar el trabajo (convenientemente dimensionado) con modelos de gestión de los datos y la información que caracterizan nuestro actual entorno social, económico, cultural y científico (Blanco, 2018). Partiendo de propuestas como los itinerarios didácticos de Alsina (2019) o las experiencias en el ámbito del aprendizaje por proyectos de Batanero y Díaz (2011), es prioritario que el profesorado revise y actualice los recursos didácticos y las orientaciones metodológicas que emplea, en base a lo cual esta investigación detectó una demanda de formación.

Referencias

Alsina, A. (2019). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Barcelona: Graó.

Batanero, C. (2009). *Retos para la formación estadística de los profesores*. II Encontro de Probabilidade e Estatística na Scola. Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Batanero, C., & Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos.* Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada: Granada.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J.M., & Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números, 83*, 7-18.

Blanco, A. (2018). Directrices y recursos para la innovación en la enseñanza de la estadística en la universidad: Una revisión documental. *REDU, 16*(1), 251-267.

Comisión Europea (2019). *Plan de lucha contra la desinformación*. Recuperado de https://bit.ly/2ZTUPYB

Gal, I. (2002). Adults' statistical literacy: Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-51.

Metaplan. (2015). *Metaplan® Basic Techniques: Moderating group discussions using the Metaplan approach.* Metaplan, Quickborn, Alemania.

Moore, D.S. (1999). Discussion: What shall we teacher beginners? *International Statistical Review, 67*(3), 250-252.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: The Council.

OCDE (2019). *OECD Future of Education and Skills 2030: OECD Learning Compass 2030.* Paris: OECD.

Schield, M. (2004). Information literacy, statistical literacy and data literacy. *Iassist Quarterly, 28*(2/3), 6-11.

Wild, C.J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-248.

Enseñar estadística en Educación Primaria: primeras recomendaciones desde el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas

Ángel Alsina
Universidad de Girona

Resumen

En la primera parte, se describe el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM), que se fundamenta en la Perspectiva Sociocultural del Aprendizaje Humano, el Modelo de Formación Realista-Reflexivo y la Educación Matemática Realista, y se define un itinerario como una secuencia de enseñanza intencionada que contempla tres niveles: 1) enseñanza en contextos informales (el entorno inmediato, los materiales manipulativos y los juegos); 2) enseñanza en contextos intermedios (recursos literarios y tecnológicos); 3) enseñanza en contextos formales (recursos gráficos); en la segunda parte, se presenta un ejemplo de itinerario de enseñanza de la estadística para estudiantes de 6 a 12 años y se ofrecen diversas recomendaciones para su aplicación en el aula.

Palabras clave: Didáctica de las Matemáticas; Educación Estadística; Itinerario de Enseñanza de las Matemáticas; Desarrollo Profesional del Profesorado; Educación Primaria

1. Introducción

El libro de texto es uno de los recursos más utilizados para enseñar matemáticas en Educación Primaria debido a diversos factores: a) una visión de la enseñanza asociada principalmente a la ejercitación; b) la creencia de que el libro de texto garantiza el recubrimiento curricular; c) la medición del aprendizaje con base en el volumen de páginas realizadas; o d) los intereses editoriales, entre otros.

La toma de consciencia de estos factores debería desencadenar una profunda reflexión acerca del papel de este recurso en las aulas. Una reflexión que debería sustentarse, además, en los resultados de estudios que señalan que el uso exclusivo del libro de texto para enseñar matemáticas conlleva descontextualización (Alsina, 2010), junto con otras investigaciones más específicas sobre el análisis de la estadística en los libros de texto de Educación Primaria, que en su práctica totalidad evidencian falencias y errores conceptuales (Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y Gea, 2015; Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y López-Martín, 2015; entre otros).

Para subsanar esta realidad y transformarla, diversos ámbitos de investigación en educación matemática y sus respectivas agendas han puesto el foco tanto en el análisis didáctico como en la construcción del conocimiento matemático. Este capítulo se centra en la agenda de investigación sobre "análisis de contextos de enseñanza y/o recursos didácticos: situaciones de vida cotidiana, materiales manipulativos, juegos, recursos tecnológicos y gráficos” que es una de las agendas del ámbito de investigación sobre análisis didáctico (Alsina, 2019a). Desde este prisma, en la primera parte se describe el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas (EIEM) planteado por Alsina (2019b); y, en la segunda parte, se presenta un ejemplo de itinerario de enseñanza de la estadística para alumnado de Educación Primaria (6 a 12 años), junto con diversas cinco recomendaciones para su aplicación en el aula.

2. Descripción del Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas

2.1. Fundamentación teórico-metodológica del EIEM

El EIEM se fundamenta en tres pilares interrelacionados:

- La Perspectiva Sociocultural del Aprendizaje Humano (Vygotsky, 1978): interesa destacar que la educación se concibe como un *fenómeno social y cultural* que es posible gracias a la interacción, la negociación y el diálogo, junto con la idea de que el pensamiento intelectual depende de la *construcción autorregulada del conocimiento*, que va de un proceso interpsicológico a un proceso intrapsicológico.
- El Modelo de Formación Realista-Reflexivo (Korthagen, 2001): interesa destacar que los futuros profesores y el profesorado en ejercicio deberían llegar a conocer *muchas maneras de actuar y ejercitarlas en la práctica*, es decir, deberían disponer de criterios para saber *cuándo, qué y por qué algo es conveniente y reflexionar sobre ello sistemáticamente*.
- La Educación Matemática Realista (Freudenthal, 1991): interesa destacar sus principios de actividad, de realidad, de reinvención guiada, de niveles, de interacción y de interconexión. A través de estos seis principios se pone de manifiesto que se usan situaciones reales o realistas como punto de partida para aprender matemáticas. Progresivamente, estas situaciones son matematizadas a través de modelos, mediadores entre lo abstracto y lo concreto, para formar relaciones más formales y estructuras abstractas. Además, se apoya en la interacción en el aula, junto con la idea de que a los estudiantes se les debería dar la oportunidad de reinventar las matemáticas bajo la guía de un adulto, en lugar de intentar trasmitirles una matemática pre-construida.

2.2. Descripción del EIEM

El EIEM tiene su origen en la *Pirámide de la Educación Matemática*, un diagrama piramidal en el que se comunica el tipo de contextos para desarrollar el pensamiento matemático y su “frecuencia de uso” más recomendable, en función de la posición que ocupa cada contexto: de más o menos frecuencia desde la base hacia la cúspide (Alsina, 2010). Con los años, este planteamiento ha evolucionado hacia el EIEM (Alsina, 2019b), asumiendo que la palabra “itinerario” se refiere a una secuencia de enseñanza intencionada que contempla tres niveles:

1. Enseñanza en contextos informales: la enseñanza del contenido matemático se inicia en situaciones reales o realistas, como el entorno inmediato, los materiales manipulativos y los juegos, en los que el conocimiento de la situación y las estrategias se utilizan en el contexto de la situación misma, apoyándose en los conocimientos informales, el sentido común y la experiencia.

2. Enseñanza en contextos intermedios: la enseñanza del contenido prosigue en contextos que hacen de puente entre los contextos reales o realistas de la fase previa y los contextos formales de la fase posterior, como algunos recursos literarios (cuentos y canciones) y tecnológicos (*Applets*, robots educativos programables, etc.), que a través de la exploración y la reflexión conducen a la esquematización y generalización progresiva del conocimiento matemático.
3. Enseñanza en contextos formales: la enseñanza del contenido finaliza en contextos gráficos y simbólicos, en los que se trabaja la representación y formalización del conocimiento matemático con procedimientos y notaciones convencionales.

El EIEM, pues, se aleja de una visión de la enseñanza de las matemáticas basada en la ejercitación como principal estrategia didáctica para "aprender" matemáticas, y en su lugar, plantea que es necesario fomentar la comprensión más que la mera memorización, la actividad heurística más que la pura mecanización y el pensamiento matemático crítico más que la simple repetición.

3. Descripción de un itinerario de enseñanza de la estadística y recomendaciones para su aplicación en el aula.

3.1. Itinerario de enseñanza de la estadística de 6 a 12 años

En el nivel 1 del itinerario es recomendable trabajar principalmente a partir de contextos reales, siguiendo el ciclo de investigación estadística de Wild y Pfannkuck (1999): por ejemplo, a partir de un reto inicial que consiste en investigar cómo afecta la temperatura en el crecimiento de las plantas, los estudiantes llevan a cabo un proceso de toma de decisiones para la recogida, organización, representación e interpretación de los datos.

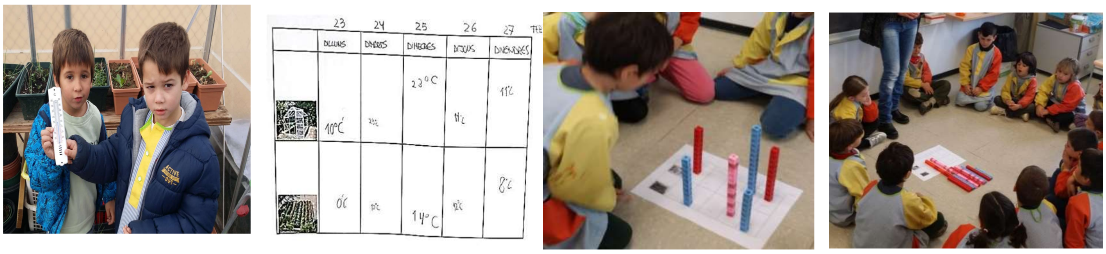


Figura 1. Recogida, organización, representación e interpretación de datos
Fuente: Alsina (2019b)

Asimismo, se deberían usar materiales manipulativos y juegos partiendo de la base que, "como en cualquier otra rama de las matemáticas, el material manipulativo debe desempeñar un papel básico en los primeros niveles de enseñanza, por la necesidad que tienen los niños de contar con referentes concretos de los conceptos abstractos que tratamos de enseñarles" (Batanero, 2000, p. 9).

Figura 2. Diversos materiales manipulativos para representar datos
Fuente: Alsina (2019b)

Una vez que los estudiantes han podido visualizar el conocimiento estadístico a través de contextos reales y materiales lúdico-manipulativos, en el nivel 2 del itinerario es recomendable ofrecer contextos que conduzcan a la esquematización y generalización progresiva, como los recursos literarios y tecnológicos (*Applets*, lenguajes de programación visual, etc.), que pueden ser de gran ayuda para establecer nexos entre la realidad y el formalismo que requiere las matemáticas.

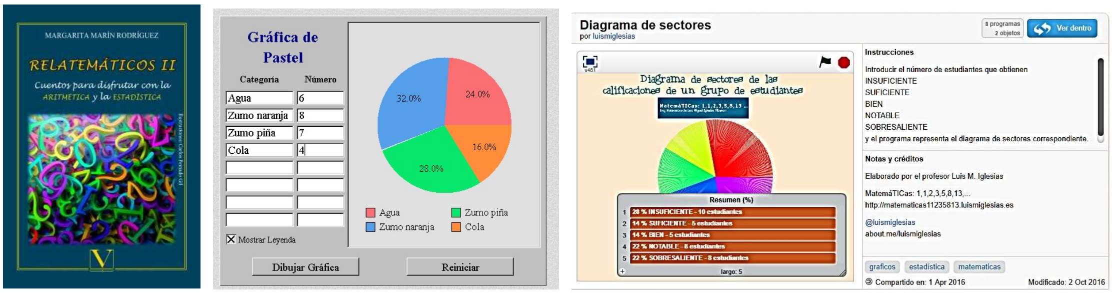


Figura 3. Recursos literarios y tecnológicos para trabajar estadística

Fuente: Alsina (2019b)

Finalmente, en el nivel 3, es recomendable utilizar recursos que promuevan la formalización e institucionalización de los aprendizajes: p. ej., *Which One doesn't Belong? (WODB)*, de Cristopher Danielson, que consiste en presentar cuatro situaciones, identificar la que no pertenece y argumentar porqué.

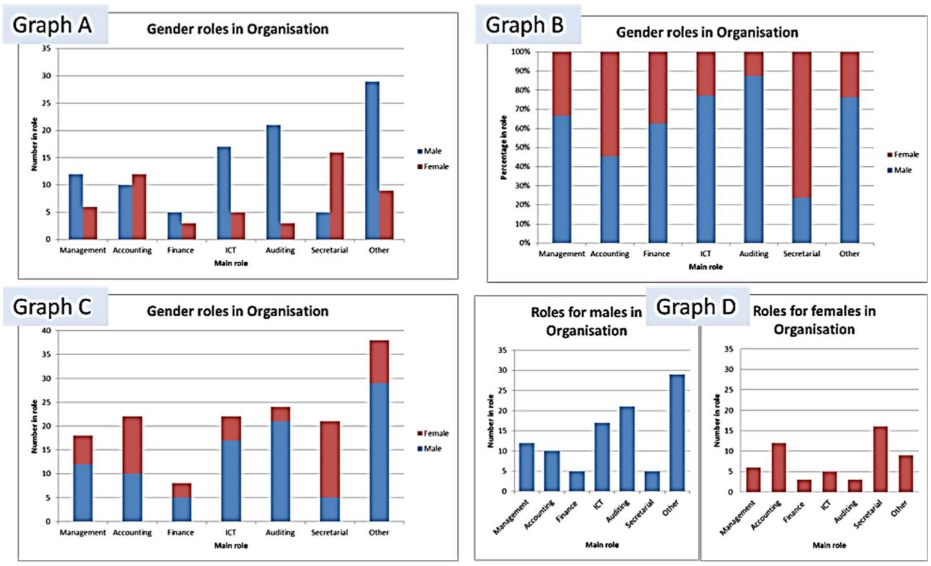


Figura 4. Recursos gráficos para trabajar estadística

Fuente: https://wodb.ca

3.2. Recomendaciones para la aplicación del EIEM en el aula

Alsina (2020) indica cinco recomendaciones: 1) planificar y gestionar la enseñanza de los contenidos a través de los procesos matemáticos; 2) promover prácticas de enseñanza que consideren tanto al alumnado como al profesorado; 3) considerar contextos informales, intermedios y formales en todas las secuencias, con distinto protagonismo según el nivel escolar; 4) garantizar el principio de abstracción progresiva, desde lo concreto hacia lo abstracto; y 5) disponer de criterios objetivos para la selección de los contextos de enseñanza de las matemáticas.

La primera recomendación se focaliza en la planificación y la gestión de la enseñanza de la estadística a través de los procesos matemáticos de resolución de problemas, razonamiento y prueba, comunicación, conexiones y representación, como se muestra en la Figura 5.

	Resolución de problemas	Razonamiento y prueba	Comunicación	Conexiones	Representación
Estadística	¿Qué problema/reto voy a plantear al alumnado? ¿Cuál es la incógnita/cuáles son los datos? ¿Qué pasos se van a seguir? .../...	¿Qué buenas preguntas voy a formular para que el alumnado argumente sus ideas matemáticas y sus acciones?	¿Cómo voy a fomentar la interacción? (en parejas, en pequeño grupo, etc.) ¿Qué vocabulario específico deben aprender?	¿Qué contenidos matemáticos se pueden relacionar? ¿Desde qué asignatura voy a plantear el reto?	¿Qué tipo de representación debe hacer el alumnado? Verbal, gráfica, simbólica ...

Figura 5. Relación cartesiana entre contenidos y procesos matemáticos.
Fuente: Alsina (2020).

La segunda recomendación parte del debate entre los modelos centrados en la transmisión de conocimientos y los modelos centrados en la construcción de conocimientos: los primeros sostienen que la eficacia del proceso de estudio está ligada más a la acción docente que al descubrimiento del alumnado y, en consecuencia, focalizan su trabajo en el modelo instruccional directo y transmisivo (Mayer, 2004), y los segundos basan su enfoque en el aprendizaje por indagación del alumnado, con un apoyo subsidiario del profesorado (Artigue y Blomhøj, 2013). El EIEM recomienda la combinación de ambos modelos, en la línea de Godino y Burgos (2020).

La tercera y cuarta recomendaciones hacen alusión a que, mientras que en las primeras edades debe haber una fuerte presencia de los contextos informales (situaciones reales, materiales manipulativos y juegos) para permitir visualizar las ideas matemáticas de manera concreta, en los últimos cursos debe ir reduciéndose esta presencia para dar mayor protagonismo a los contextos intermedios y formales (recursos tecnológicos y gráficos, principalmente) para lograr la formalización y la institucionalización de los aprendizajes, pero sin olvidar que los contextos informales son imprescindibles para enseñar nuevas ideas matemáticas en cualquier edad y que, en todas las secuencias de enseñanza, debería respetarse el principio de abstracción progresiva.

Finalmente, la última recomendación hace referencia a que, ante la gran avalancha de recursos disponibles para enseñar estadística, es necesario que el profesorado disponga de criterios respaldados por la investigación para seleccionar recursos que garanticen un buen aprendizaje, p. ej. el instrumento validado ETMAP (*Evaluating the Teaching of Mathematics through Processes*) de Alsina, Maurandi, Ferre y Coronata (2020) o los criterios de Idoneidad Didáctica planteados por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos, en especial la idoneidad mediacional, que permite valorar la adecuación de los recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de instrucción (Godino, Batanero y Font, 2007).

Referencias

Alsina, Á. (2010). La “pirámide de la educación matemática”, una herramienta para ayudar a desarrollar la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa, 189,* 12-16.

Alsina, Á. (2019a). La educación matemática infantil en España: ¿qué falta por hacer? *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 100,* 85-108.

Alsina, Á. (2019b). *Itinerarios didácticos para la enseñanza de las matemáticas (6-12 años)*. Barcelona: Editorial Graó.

Alsina, Á. (2020). El Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? *TANGRAM – Revista de Educação Matemática, 3*(2), 127-159. doi: 10.30612/tangram.v3i2.12018.

Alsina, Á., Maurandi, A., Ferre, E., y Coronata, C. (2020). Validating an Instrument to Evaluate the Teaching of Mathematics Through Processes. *International Journal of Science and Mathematics Education.* doi:10.1007/s10763-020-10064-y

Artigue, M., y Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics*. ZDM Mathematics Education 45,* 797-810. doi: 10.1007/s11858-013-0506-6.

Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Biaix, 15,* 2-13.

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y Gea, Mª M. (2015). Análisis de gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria española. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 44,* 90-112.

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P. y López-Martín, Mª del M. (2015). Análisis de los gráficos estadísticos presentados en libros de texto de educación primaria chilena. *Educação Matemática Pesquisa, 17*(4), 715-739.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrectht: Kluwer Academic Publishers.

Godino, J. D. y Burgos, M. (2020). Interweaving transmission and inquiry in mathematics and sciences instruction. En K. O. Villalba-Condori et al. (Eds.), *CISETC 2019, CCIS 1191* (pp. 6–21). Springer Nature Switzerland AG. doi:10.1007/978-3-030-45344-2_2.

Korthagen, F.A. (2001). *Linking practice and theory. The pedagogy of realistic teacher education*. Londres: Lawrence Erlbaum Associates.

Mayer, R. E. (2004). Should there be a three-strikes rule against pure discovery learning? *American Psychologist, 59*(1), 14-19. doi: 10.1037/0003-066X.59.1.14.

Vygotsky, L.S. (1978). *Mind in society. The development of higher psychological processes*. Cambridge (Mass): Harward University Press.

Wild, C. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review, 67*(3), 223-262.

Implementação de projetos na formação inicial de professores para o ensino de Estatística na Educação Básica no Brasil

Suzi Samá[1], Marta Élid Amorim[2]

[1]Universidade Federal de Rio Grande, [2]Universidade Federal de Sergipe

Resumo

A Base Nacional Comum Curricular da Educação Básica aprovada recentemente no Brasil amplia os conceitos estatísticos neste nível de ensino. Por outro lado, poucos cursos de licenciatura ofertam disciplinas que abordem conceitos de Estatística na formação do futuro professor. Nesse sentido, o presente texto tem por objetivo discutir a utilização da metodologia de projetos para potencializar competências e conhecimentos estatísticos necessários na prática docente da Educação Básica. Buscamos fundamentação na Base do Conhecimento proposta por Lee Shulman, na Idoneidade Didática de Juan Godino e no Letramento Estatístico de Iddo Gal, a fim promover uma discussão sobre a metodologia de ensino por projetos na disciplina de Estatística sob a luz dessas teorias. A partir do entendimento da importância da Estatística na compreensão de fenômenos de diversas naturezas e na tomada de decisões, defendemos que o seu estudo precisa ir para além do conhecimento específico, precisa também abranger o contexto e todas as nuances e complexidade inerente à construção do conhecimento.

Palavras-chave: Formação de Professores, Educação Estatística, Idoneidade Didática, Letramento Estatístico, Educação Básica.

1. Introdução

Com a aprovação da Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018), que fixou conteúdos mínimos para a Educação Básica no Brasil, a Estatística e a Probabilidade ganharam espaço no currículo escolar, sendo uma das cinco unidades temáticas da área de Matemática. Com isto, as redes de ensino estão em fase de elaboração e implementação dos novos currículos. Esses currículos estão sofrendo significativas modificações, principalmente no que tange a inclusão de conceitos estatísticos, que agora passam a compor os conteúdos obrigatórios desde o primeiro ano do Ensino Fundamental.

Um dos aspectos importantes no ensino de Estatística na Educação Básica consiste em possibilitar ao estudante, um entendimento intuitivo e formal das principais ideias matemáticas que estão implícitas em representações estatísticas, procedimentos ou conceitos (Lopes, 2008). Quando o estudante adquire as habilidades de ler e usar a linguagem estatística para entender informações presentes na vida cotidiana ele alcança uma das três competências da Estatística, o Letramento (Garfield e Ben-Zvi, 2008). O Letramento Estatístico também abarca a capacidade de avaliar e comunicar criticamente informações estatísticas e tirar conclusões a partir delas (Gal, 2002). Para tal, é necessário que os professores planejem atividades que possibilitem aos estudantes perceber a existência da variabilidade, incerteza, aleatoriedade, bem como a reduzir e representar os dados coletados.

Para tal, se faz necessário que a formação inicial do professor que atuará na educação básica possibilite a este adquirir tanto o conhecimento dos conceitos estatísticos como o conhecimento pedagógico destes. Para Lopes (2008) a amplitude do conceito é mais importante do que o conceito formal. Segundo a autora, o processo de ensinar e aprender conceitos estatísticos com base na resolução de problemas, simulações e experimentos, possibilita ao professor construir conhecimentos, à medida que estabelece relações com informações adquiridas e com o domínio de diferentes linguagens e formas de expressão.

Arteaga, Batanero, Cañadas e Gea (2012) também defendem que para alcançar a melhoria do ensino de estatística nas escolas é necessário aperfeiçoar a formação de professores. No entanto, pesquisadores da Educação Estatística no Brasil, como Viali (2008) e Cazorla (2006), salientam que nem todos os cursos de formação de professores de matemática ofertam disciplinas de Estatística, e quando estas integram o currículo dos cursos, em geral, abordam conceitos básicos, e, raramente, questões relacionadas ao ensino dos mesmos. Dessa forma, se faz necessário que mais pesquisas estejam em consonância com as demandas da formação de professores para o ensino de Estatística, em especial na Educação Básica.

Neste contexto, neste capítulo discutimos o a utilização da metodologia de projetos para potencializar competências e conhecimentos estatísticos necessários na prática docente da Educação Básica. Para tal, buscamos fundamentação teórica em Shulman (1987), Godino (2009, 2011), e Gal (2002), os quais apresentamos na próxima seção. Na terceira seção do artigo, defendemos a potencialidade da proposta de um trabalho com projetos a luz do aporte teórico. Por fim, tecemos algumas considerações sobre a proposta deste capítulo.

2. Aporte teórico

No processo de planejamento da atividade pedagógica para o ensino de Estatística e Probabilidade apresentada neste capítulo, consideramos a Base do Conhecimento proposta por Shulman (1987), relativos ao conhecimento profissional docente, a Idoneidade Didática de Godino (2009, 2011) e o Letramento Estatístico na perspectiva de Gal (2002).

A partir de seus estudos Shulman (1987) propôs uma base do conhecimento necessários ao professor para o ensino. Essa base inclui, no mínimo, aspectos relacionados ao conhecimento do conteúdo, conhecimento pedagógico geral, conhecimento do currículo, conhecimento pedagógico do conteúdo, conhecimento dos estudantes e de suas características, conhecimento de contextos educacionais e conhecimento das finalidades, propósitos e valores da educação. Para o autor, o conhecimento pedagógico do conteúdo é de especial importância, porque identifica os diferentes corpos de conhecimento necessários para o ensino.

Para Shulman (1986) o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo diz respeito às teorias e princípios dos processos de ensino do tema, no caso deste texto, dos conceitos estatísticos e probabilísticos, conhecimentos das distintas representações, analogias, ilustrações e exemplos, que permita a elaboração de argumentações que favoreçam a compreensão e torne a aprendizagem mais fácil. Além de compreender as dificuldades enfrentadas por estudantes e maneiras de superá-las, incluindo aquelas presentes em resultados de pesquisas.

Em consonância com as ideias de Shulman (1986, 1987), Godino, Batanero, Rivas e Arteaga (2013) defendem que o conhecimento que o professor deverá ter para ensinar "implica em uma articulação entre o matemático e o didático". (p. 71). Dessa forma, optamos por também nos apoiar na Teoria da Idoneidade Didática proposta por Godino (2011) a qual considera seis dimensões para abarcar os conhecimentos necessários ao professor para ensinar matemática e estatística, a saber: epistêmica, cognitiva, afetiva, mediacional, interacional e ecológica, as quais são explicitadas no Quadro 1.

Quadro 1 – Dimensões da Idoneidade Didática

Idoneidade epistêmica	grau de representatividade dos significados institucionais implementados ou pretendidos, em relação a um significado de referência.
Idoneidade cognitiva	expressa o grau em que os significados pretendidos se situam no domínio cognitivo do indivíduo a partir de seus conhecimentos prévios, bem como a proximidade dos significados pretendidos à expectativa de aprendizagem dos conceitos matemáticos/estatísticos.
Idoneidade interacional	um processo de ensino e aprendizagem terá maior idoneidade de um ponto de vista interacional quando as configurações e as trajetórias didáticas permitem identificar conflitos semióticos potenciais (que podem ser detectados a priori), bem como resolver conflitos vivenciados durante o processo de ensino.
Idoneidade mediacional	grau de disponibilidade e apropriação de recursos materiais e do tempo necessário ao desenvolvimento do processo de ensino e de aprendizagem.
Idoneidade emocional	grau de envolvimento (interesse, motivação, ...) do aluno no processo de estudo. A idoneidade emocional está relacionada a fatores que dependem tanto da instituição quanto do aluno e sua história escolar prévia.
Idoneidade ecológica	grau em que o processo de estudo se ajusta ao projeto educativo, à escola e à sociedade, bem como aos condicionamentos do contexto em que se desenvolve.

Fonte: Adaptado de Godino (2009)

As dimensões consideradas na Idoneidade Didática tem por objetivo melhorar o processo de aprendizagem dos alunos, no nosso caso da aprendizagem da Estatística e Probabilidade. Além disso, possibilita avaliar a adequação e pertinência da ação pedagógica, dos conhecimentos elencados e dos recursos didáticos adotados no processo de ensino. Desta forma, a idoneidade didática tanto pode auxiliar o professor a melhorar o processo de ensino em sala de aula de forma a promover a aprendizagem dos estudantes, quanto no processo de formação do professor. As dimensões de idoneidade didática apresentam interações entre si, as quais devem ser consideradas no planejamento e desenvolvimento do projeto de ensino pelo professor.

Gal (2002) propõe um modelo para o Letramento Estatístico que envolve dois componentes: o cognitivo e o afetivo. O componente cognitivo consiste da competência do indivíduo para compreender, interpretar e avaliar criticamente as informações estatísticas. Esse componente é formado por cinco elementos, a saber: letramento, conhecimento matemático, conhecimento estatístico, letramento, conhecimento de contexto e competência para elaborar questionamentos. O componente afetivo é formado por dois elementos, o primeiro diz respeito as crenças e atitudes que moldam a visão de mundo do indivíduo, o segundo está relacionado a postura crítica, ou seja comportamento questionador do indivíduo mediante as informações estatísticas.

Considerando a Base do Conhecimento proposta por Shulman (1986, 1987), a Idoneidade Didática de Godino (2009, 2011) e o Letramento Estatístico de Gal (2002), apresentamos na sequência a metodologia de ensino pela pesquisa e seu entrelaçamento com o aporte teórico aqui descrito.

3. Ensino de Estatística pela pesquisa

Defendemos que o futuro professor vivencie em seu processo de formação inicial experiências didáticas que lhes possibilite refletir sobre como trabalhar os conceitos estatísticos com seus futuros estudantes. Desta forma, quando o docente de Estatística em um curso de formação de professores adota o ensino pela pesquisa está possibilitando ao futuro professor desenvolver o letramento estatístico a partir de temas de seu interesse e contexto (idoneidade epistémica). A possibilidade de aplicar os conceitos estatísticos em uma pesquisa de opinião sobre determinado tema de seu interesse torna o processo de aprendizagem mais instigante e promove atitudes e motivações positivas por parte dos futuros professores frente aos conceitos estatísticos (idoneidade emocional). Para Samá e Novaes (2020) a maior interação proporcionada nessa metodologia de ensino também possibilita que o docente da disciplina perceba mais facilmente as dificuldades dos futuros professores em entender os conceitos estatísticos.

O futuro professor ao escolher o tema e iniciar o processo da pesquisa parte do seu domínio de conhecimento e ao longo do processo atinge outras compreensões e conhecimentos previamente explicitados como expectativas de aprendizagem (idoneidade cognitiva). A discussão realizada entre os futuros professores, sobre o tema que pretende investigar, desencadeia reflexões que conduzem a certezas provisórias e dúvidas temporárias. Para sanar as dúvidas e verificar as certezas, o futuro professor busca informações em periódicos e repositórios científicos. A partir das informações obtidas, o futuro professor inicia um debate com seus colegas e docente da disciplina apresentando seus argumentos e desenvolvendo competências comunicativas (idoneidade interacional). Para Garfield e Ben-Zvi (2007), atividades pedagógicas que possibilitam o trabalho colaborativo e consideram as concepções previas do indivíduo, resultam em uma melhor compreensão e construção dos conceitos estatísticos.

Sanadas as dúvidas e confirmadas ou refutadas o que se tinha inicialmente como certezas, os professores em formação iniciam a elaboração do questionário para levantar a opinião das pessoas sobre o tema da pesquisa. Neste processo o docente da disciplina pode adotar recursos didáticos que auxiliem os futuros professores a compreenderem as etapas de uma pesquisa estatística (idoneidade mediacional). No planejamento da aplicação do questionário, o docente pode discutir com os futuros professores os métodos de amostragem (probabilístico ou não-probabilístico) e auxiliá-los na escolha do tipo de amostragem mais adequada (aleatória, sistemática, por conglomerados,…). Na organização e apresentação dos dados os futuros professores terão que optar pela representação gráfica mais adequada para cada item do questionário de acordo com as características do gráfico e da variável envolvida no item (qualitativa nominal ou ordinal, quantitativa discreta ou contínua). As variáveis quantitativas podem ser resumidas por meio de medidas estatísticas, como média, mediana, desvio-padrão e coeficiente de variação. Nesta etapa da organização dos resultados, o docente da disciplina pode adotar novamente recursos didáticos que auxiliem os futuros professores nessas decisões e levá-los a justificar as suas escolhas. Ao longo desse processo, os futuros professores passam a conhecer as características de cada tipo de gráfico, seus elementos e adequações, da mesma forma com as medidas estatísticas.

O ensino por projeto exige flexibilidade e domínio do conhecimento do conteúdo por parte do docente da disciplina uma vez que ele assume a imprevisibilidade presente no processo de construção de conhecimento e se dedica a ouvir o professor em formação ao invés de definir previamente diretrizes. Da mesma forma, o domínio do conhecimento pedagógico auxilia o docente a adotar estratégias de ensino que podem auxiliar o futuro professor a sanar suas dúvidas. Por sua vez, o conhecimento curricular do docente possibilita articular o tema da pesquisa com outras áreas do conhecimento, bem como com os conteúdos de outras disciplinas (idoneidade ecológica).

Espera-se que ao final do projeto de pesquisa os futuros professores compreendam a origem e importância dos dados, conheçam os termos e aplicações dos conceitos estatísticos, sejam capazes de interpretar e tomar decisões com base em informações estatísticas, ou seja, tenham desenvolvido o Letramento Estatístico.

4. Considerações

Em virtude de todo o exposto, é nosso ponto de vista que, dada a importância da estatística para a compreensão da realidade e tomada de decisões, seu estudo não pode estar vinculado a um único aspecto que privilegie o conhecimento específico, sob pena de promover uma aprendizagem desprovida de significado. Isto é, a abordagem desse tema deve considerar todas as nuanças, toda a complexidade inerente à construção desse conhecimento.

Assim, defendemos que nos cursos de formação de professores, o trabalho com projetos esteja em certa medida presente, pois pode favorecer o Letramento Estatístico a partir de temas que façam parte da realidade dos estudantes e contribuam para compreender e/ou resolver problemas do contexto em que estão inseridos. Além de, passar a integrar o repertorio de metodologia a serem utilizadas em suas aulas quando professores da Educação Básica.

Referências

Arteaga, P. Batanero, C. Cañadas, G. R., Gea, M. M. (2012). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico. *Educ. Matem. Pesq*., São Paulo, 14 (2), 279-297.

Brasil. Ministério da Educação (MEC) (2017). *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília: MEC. Retirado em: 10 de setembro, 2019, de: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.

Cazorla, I. M. (2006). Teaching statistics in Brazil. In: A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Intern. Assistant for Statist Education, Salvador, Brazil.

Cazorla, I. M.; Santana, E. R, S. (2010). *Do Tratamento da Informação ao Letramento Estatístico*. Itabuna: Via Litterarum, p. 255.

Conti, K. C.; Nunes, L. N.; Estevam, E. J. G.; Goulart, A. (2019). Um cenário da Educação Estatística em cursos de Pedagogia. *REVEMAT*, 14 (Educação Estatística), 1-15.

Gal, I. (2002). Adults' Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. *International Statistical Review*. 70 (1), 1-25.

Garfield, J. e Ben-Zvi, D. (2008). Preparing school teachers to develop students' statistical reasoning. In: Batanero, C.; Burril, G.; Reading, C. e Rossman, A. (eds.). *Teaching statistical in school mathematics*: challenges for teaching and teacher education. Proceedings of the ICMI Study 18 and 2008. London: IASE Round Table Conference, 1-6.

Godino, J. D. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Unión*. 20, 13-31.

Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Conferencia apresentada em XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

Godino, J. D., Batanero, C., Rivas, H. & Arteaga, P. (2013). Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. *Revista Eletrônica de Educação Matemática*. 8(1), 46-74.

Godino, J. D.; Batanero, C.; Roa, R.; Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. En C. Batanero, G. Burrill, C. Reading y A. Rossman (Eds.), Proceedings of the Joint ICMI /IASE StudyTeaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education. Monterrey, Mexico: ICMI e IASE. Online: www.ugr.es/~icmi/iase_study/.

Lopes, C. E. (2008). O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Cadernos CEDES*, *28*(74), 57-73.

Samá, S. P.; Novaes, D. V. Rota percorrida no repensar da sala de aula de Estatística: uma navegação pela insubordinação criativa. *International Journal of Research in Mathematics Education*, 10 (1), 2020, 122-136.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, (57), 1-21.

Viali, L. (2008). O Ensino de Estatística e Probabilidade nos Cursos de Licenciatura em Matemática. Anais do 18° Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística. Estância de São Pedro, SP. Doi 10.13140/RG.2.1.3956.4640.

Conhecimentos prévios de tabela de dupla entrada por estudantes de uma licenciatura em matemática

Auriluci de Carvalho Figueiredo[1], Cileda de Queiroz Silva Coutinho[2], Enzo Bertazini[3]

[1]Universidade Metropolitana de Santos; [2]Universidade Católica de São Paulo,

[3]Instituto Federal de São Paulo

Resumo

O objetivo do artigo é apresentar uma análise das respostas de estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática a uma avaliação diagnóstica que envolve conhecimento para construir, ler e interpretar dados em tabelas de dupla entrada, assim como qual relação eles estabelecem entre esta e o cálculo de probabilidades. A análise dos dados coletados foi baseada nos protocolos destes estudantes. Tomamos como análise níveis de compreensão de tabela e registros de representação. Dentre as conclusões, destacamos que há estudantes que além de construírem tabelas de dupla entrada a partir de determinados dados, estabelecem relação com o cálculo de probabilidades, porém entre eles também há alunos que apresentam dificuldade com a sua construção, confundindo frequência com enumeração.

Palavras-chave: tabela de dupla entrada, probabilidade, registro de representação.

1. Introdução

No Brasil, a BNCC – Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) indica quais as competências e habilidades a serem desenvolvidas pelos alunos na Educação Básica, em relação ao ensino de Matemática. Ela orienta que a partir do 1º ano de escolaridade, os alunos devem desenvolver um trabalho de leitura de tabelas simples; no 2º ano, comparar informações de pesquisas apresentadas por meio de tabelas de dupla entrada; e a partir do 3º ano, o aluno deve ler, interpretar e representar dados em tabelas de dupla entrada.

Este documento também enfatiza a importância do trabalho com tabelas em outras áreas do conhecimento como na Língua Portuguesa, que considera a importância do desenvolvimento de leitura de gêneros textuais que se apresenta na mídia, destacando, entre eles, gráficos e tabelas; e ressalta que alunos também devem "expor trabalhos ou pesquisas escolares, em sala de aula, com apoio de recursos multissemióticos (imagens, diagrama, tabelas etc.) (Brasil, 2018, p.131).

Supomos que o interesse pelo ensino de tabelas se torna relevante neste documento pela quantidade de informações que hoje as mídias oferecem nesta forma de registro. De acordo com Gal (2012), torna-se necessário o desenvolvimento de certas habilidades para interpretar corretamente informações probabilísticas normalmente encontradas na mídia. O autor destaca que há necessidade de se abordar situações que possam proporcionar aos estudantes a instrução necessária para acessar, utilizar, avaliar criticamente, comunicar e reagir a mensagens probabilísticas encontradas em contextos de leitura, compreender textos apresentados em gráficos e tabelas de dupla entrada.

Pesquisadores como Gea, Gossa, Batanero e Pallauta (2019), ao desenvolver uma pesquisa com professores da Educação Primária na Espanha, constatam que os participantes constroem a tabela de entrada dupla correta em sua maior parte. As pesquisadoras partem de dados apresentados na linguagem natural que os professores da Educação Primária devem converter em uma tabela, e as principais dificuldades são observadas na interpretação das representações que eles constroem. Figueiredo (2018), ao desenvolver atividades com futuros professores, estudantes de um curso de Licenciatura de Matemática, diante do contexto de probabilidade, indica que alguns não mostraram familiaridade com esse registro, e apresentaram dificuldades em ler os dados na tabela, mesmo reconhecendo que ela descreve o contexto da quantidade de alunos da sala separados por homens, mulheres e semestres do curso (variável sexo e variável semestre no curso).

Diante de inquietudes quanto aos conhecimentos prévios dos alunos necessários ao desenvolvimento da disciplina Probabilidade em um curso de Licenciatura em Matemática, aliadas à preocupação em atender exigências de uma avaliação diagnóstica de uma instituição solicitada a professores no início do período letivo, aplicou-se uma atividade, no primeiro dia de aula, com os alunos deste curso. Neste artigo, temos como objetivo apresentar uma análise das respostas de estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática a uma avaliação diagnóstica que envolve conhecimento de representar, ler e interpretar dados em tabelas de dupla entrada, assim como qual relação eles estabelecem entre esta e o cálculo de probabilidades.

2. Probabilidade e a tabela de dupla entrada

Nos livros didáticos do Ensino Médio no Brasil é comum encontrarmos exercícios de probabilidade que tragam em seu enunciado, como parte dos dados apresentados, uma tabela de dupla entrada e, portanto, para resolvê-lo, é necessário interpretação e leitura dos dados nela contidos. Para melhor elucidar nossa proposta, apresentamos a seguir um exemplo na figura 1:

Em uma comunidade com 200 pessoas adultas, das quais 120 são mulheres e 80 são homens, foi feito um levantamento a respeito da necessidade de destinar um espaço para a construção de um campo de futebol. Cada homem e cada mulher votaram **sim** (concordando) ou **não** (discordando). Após a pesquisa, foi divulgado o resultado, conforme a seguinte tabela:

	Sim	Não	Total
Mulheres	45	75	120
Homens	74	6	80
Total	119	81	200

Como a maioria votou **sim**, decidiram que uma dessas pessoas seria escolhida como representante da comunidade junto à empresa que construiria o campo de futebol. Vamos calcular a probabilidade de ocorrência do:

a) evento A – pessoa escolhida ser homem.

b) evento B – pessoa escolhida ter votado **sim**.

c) evento $A \cap B$ – pessoa escolhida ser homem e ter votado **sim**.

d) evento $A \mid B$ – pessoa escolhida ser homem dado que tenha votado **sim**.

Figura 1: Exercício de Probabilidade de Livro didático

Fonte: Longen (2016)

A tabela apresentada não usa título e nem fonte, como orientam, para sua construção, Curcio (1989) e Estrella, Mena e Olfos (2014), e não menciona que tal tabela seja de dupla entrada. Para Lahanier-Reuter (2013), são também chamadas de tabelas de contingência. Além disso:

> Essas tabelas são formadas pelo cruzamento de duas variáveis informadas. Seu desenvolvimento requer voltar à tabela inicial de dados e contar os sujeitos apresentando simultaneamente dois valores das variáveis consideradas. Essas tabelas são delimitadas por quatro margens. As duas "principais" fazem fronteira com a tabela à esquerda e acima. Eles são anunciados na caixa superior esquerda. Desta vez, não é mais uma questão de margens aparecerem em listas enumerativas, mas de margens que são variações de duas variáveis. (Lahanier-Reuter, 2013, p.148)

O exercício proposto no livro didático mobiliza, no item (a), leitura dos dados na margem lateral à direita e nela a identificação do número de elementos do evento A, isto é n (A) = 80, e no item (b) da marginal inferior, evento B, pessoa escolhida votar sim, e n (B) = 119. No item (c), a leitura e interpretação envolve o cruzamento da linha e da coluna, variáveis sexo e voto, nos eventos "homem" e "votou sim".

No item (d), mobiliza conhecimento de probabilidade condicional. Segundo Figueiredo (2000, 2018), o registro tabela favorece a resolução de atividades que mobiliza tais conceitos, pois reconhecendo a condição dada como limitação do espaço amostral, pode-se ver na tabela a marginal correspondente, isto é, pessoa escolhida votou sim, que nesse caso passa ser $n(\Omega) = 119$, e a probabilidade do evento A | B ocorrer é 74/80 = 0,925. Para Duval (2003a), as tabelas não são representações autônomas, como todas as representações que favorecem a visualização. Elas estão associadas às funções cognitivas que elas podem cumprir, que, associadas à probabilidade, envolvem a maneira de ler os dados dos eventos na tabela.

3. Marco teórico

As atividades aplicadas por Figueiredo (2018) com alunos da Licenciatura em Matemática destacam, entre outros registros, a utilização de tabelas de dupla entrada, que considera uma ferramenta eficaz no trabalho com modelos probabilísticos, e as relaciona com a Teoria de Registros de Representação Semiótica nos termos de Duval (2003a). O autor descreve que a leitura e a interpretação de gráficos e tabelas e admite que a interpretação não se dá de forma simples, pois precisa ativar todas as funções cognitivas. Na questão das tabelas, a função identificação é a mais utilizada, devido à visualização dos dados de forma separada. Para Duval (2003a, 2003b), o estudo de gráficos e tabelas deve ser pautado no trânsito entre diferentes tipos de registros, e que cada um dos registros requer um tipo de tratamento. Destacaremos aqui alguns tipos de tratamento que requer o estudo da tabela de dupla entrada.

Estrella, Mena e Olfos (2014) apresentam quatro diferentes níveis para a compreensão da leitura de tabelas, inspiradas na classificação Curcio (1989). Estrella et al. (2014) identificam: no nível 1 deve-se ler as células, leitura pontual para associar apenas os dados; no nível 2 deve-se ler a estrutura básica da tabela e os relacionamentos contido nele, comparar e interpretar, operar com dados da célula e dispensar parcialmente alguns dados; nível 3 deve-se interpretar e comparar os cálculos contidos no tabela ou aqueles produzidos a partir dela, usando seu conhecimento do contexto externo ou interno da dados, e também incluir e reformular a tabela; no nível 4 deve-se ler, além da tabela (leitura construtiva total), e este nível inclui também a formulação de outra representação com base em toda a tabela.

4. Metodologia

Nosso artigo é um estudo de caso, nos termos de Ponte (2006), que visa conhecer uma entidade bem definida em um sistema educativo e para isso, tomamos como ponto de partida uma atividade proposta para alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Este trabalho foi desenvolvido junto a 22 alunos do terceiro semestre em uma instituição de ensino superior pública no estado de São Paulo. A avaliação diagnóstica aplicada foi realizada em duplas, que foram formadas livremente pelos alunos. A atividade está apresentada na Figura 2.

Considere todos os seus colegas presentes na aula de hoje e faça o levantamento da idade e do sexo de cada um deles.

a) Com os resultados encontrados construa uma tabela de dupla entrada. Considere dois intervalos de idades: o primeiro com idades menores de 22 anos e o segundo com idades maiores ou iguais a 22 anos.
b) Após construída a tabela, formule questões sobre probabilidade considerando os dados

Figura 2: Avaliação diagnóstica proposta aos alunos

Fonte: os autores

A escolha do enunciado foi baseada na representação do contexto de um grupo que retrata a própria sala de aula, e a divisão em relação às idades havia sido previamente levantada a partir dos dados fornecidos pelo professor da turma, de modo que gerasse, com alunos menores e maiores que 22 anos de idade, uma tabela de dupla entrada com representantes de todas as variáveis envolvidas (idade e sexo). A atividade envolve, além da elaboração da tabela, o levantamento dos dados, pois os alunos deveriam realizar uma pesquisa com os integrantes da sala no dia que a atividade foi aplicada. Somente os pesquisadores tinham acesso a esses dados previamente e, portanto, a atividade envolveu coleta, registro e representação de dados na sua primeira fase.

Uma forma que os alunos participantes poderiam representar os dados está descrita na Tabela 1, que indica os dados relacionando a variável idades e a variável sexo, onde podem-se incluir outras informações, como as somas das linhas e colunas geradas na tabela, que podem ser relacionadas com cálculos de probabilidades, ao se inserir um contexto de sorteio aleatório de um elemento da turma. Ao realizar estas operações das somas, estamos colocando em jogo alguns tratamentos, internos ao registro figural, de acordo com a Teoria de Duval (2003a).

Tabela 1. Dados dos estudantes da classe

Idade / Sexo	Menor de 22 anos (A)	22 anos ou mais (B)	Total
Feminino (F)	7	5	12
Masculino (M)	5	5	10
Total	12	10	22

Fonte: elaborado pelos autores

Borovinick (2012) utiliza as tabelas de contingência, opcionalmente como uma estratégia para tratar as atividades relacionadas a Probabilidade, e utiliza nas linhas e colunas as probabilidades correspondentes às variáveis e eventos. Figueiredo (2019), a partir da leitura e a interpretação dos dados dos eventos envolvidos, também coloca as probabilidades nas células das tabelas utilizando a mesma estratégia. A partir dessas indicações e tomando o contexto a atividade proposta aos alunos da licenciatura em Matemática, construímos a Tabela 2. Nesta tabela podem constar algumas das respostas às questões formuladas pelos alunos.

Tabela 2. Probabilidades Conjuntas, Marginais e Totais

Sexo \ Idade	A	B	Total
F	P(A∩F) = 7/12	P(B∩F) = 5/10	P(F) = 12/22
M	P(A∩M) = 5/12	P(B∩M) = 5/10	P(M) = 10/22
Total	P(A) = 12/22	P(B) = 10/22	1

Fonte: elaborado pelos autores

5. Discussão e Resultados

A análise dos dados dos alunos foi baseada nos protocolos entregues e na observação de um dos pesquisadores envolvidos. Em relação à elaboração das tabelas, classificamos as 12 duplas em três categorias, considerando a construção das tabelas. Essas categorias não foram criadas com o intuito de montar alguma taxionomia para isso, mas sim agrupar por similaridades os registros apresentados por eles.

Na primeira categoria, composta por três duplas, os alunos construíram algo parecido com tabelas simples, uma com os dados referentes à variável idade dos alunos, e outra tabela referente aos dados da variável sexo. A preocupação deles parece ser de enumerar, e não sintetizar, os dados pela sua contagem. Ou seja, para eles a tabela deveria trazer a lista com todos os elementos que satisfizessem o evento estudado. Em relação às questões elaboradas para o estudo das probabilidades, apresentam perguntas distintas para cada uma das variáveis. Supomos que, por não estabelecerem relações entre as variáveis em uma única tabela, não conseguiram também elaborar questões que envolvessem as duas variáveis (os dois eventos que se poderia estudar) simultaneamente.

Na segunda categoria, composta por 6 duplas, construíram tabelas que relacionam as variáveis A e B, porém não as escreveram conforme o esperado. Criaram mais categorias do que pressupusemos com os eventos A e B, e acreditamos que isto tenha ocorrido por não saberem sintetizar as informações ou não conseguirem reformular a tabela. Em relação às questões de probabilidade que estes alunos criaram, nos enunciados indicaram cálculo das probabilidades com duas variáveis, e alguns deles, além das probabilidades conjuntas, propuseram questões na língua natural que exigiria a mobilização do conceito de probabilidade condicional para sua solução.

Na terceira categoria, composta de 2 duplas, construíram tabelas bem próximas do esperado. Para resolução das questões formuladas foi necessário conhecimento das probabilidades conjuntas e, condicionais. Apresentaram nos enunciados palavras com dados referentes às probabilidades marginais. Concluímos que esta categoria consegue operar com a tabela construída, reconhecendo possíveis tratamentos que envolvem a tabela de dupla entrada e o cálculo de probabilidades. Ou seja, os resultados indicam que os alunos percebem a ação do acaso ao escolherem, aleatoriamente, um elemento do conjunto dado (sorteio aleatório), o que permite a passagem das frequências para as probabilidades.

Em relação aos níveis de Estrella, Mena e Olfos (2014), somente a nossa terceira categoria construiu a tabela de dupla entrada apresentando nível 3 de compreensão. As demais duplas não construíram tabelas de dupla entrada e apresentam informações em quadros que não seguem nenhum tipo de construção que se possa atribuir a alguma categoria de compreensão de tabelas.

6. Considerações Finais

Na aplicação desta atividade não houve interferência do professor da sala. Com os protocolos apresentados, ficou evidente que maioria não soube construir uma tabela de dupla entrada, que é conhecimento preconizado pela BNCC (2018) a partir do 3º ano do Ensino Fundamental, e utilizado em livros didáticos com questões que envolvem probabilidade. Alguns questionamentos aparecem diante do constatado: que conhecimentos estes alunos trazem da Educação Básica sobre tabelas? Vale destacar que estes alunos não estudaram sua escolaridade básica sob a égide da BNCC, mas que deverão exercer sua profissão de professor nesse contexto.

Estes resultados forneceram subsídios para que o professor possa estabelecer relação entre os conhecimentos prévios de seus alunos e procurar caminhos que promovam o desenvolvimento sobre a leitura, interpretação e construção da tabela de dupla entrada, e sua relação com o cálculo de probabilidades.

Referências

Borovcnik, M. (2012). Multiple perspectives on the concept of conditional probability. *Avances de Investigación en Didactica de la Matemática,* 2, 5-27.

Brasil. (2018). Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular: BNCC*. Brasília: MEC

Curcio, F. R. (1989). Developing graph comprehension. Reston, VA: N.C.T.M.

Duval, R. (2003a). Comment Analyser le Fonctionnement Representationnel des Tableaux et leur Diversite? *Spirale - Revue de Recherches en Éducation,* 32, 7-31.

Duval, R. (2003b). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In S. D. A. Machado (Org.), *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica* (pp. 7-10). Campinas: Papirus.

Estrella, S. (2014a). El formato tabular: una revisión de literatura. *Revista Actualidades Investigativas en Educación, 14* (2), 1–23.

Estrella, S., Mena, A., & Olfos, R. (2014). Desarrollo de una taxonomía de comprensión tabular. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 27, 1041-1047.

Figueiredo, A. (2000). Probabilidade condicional: um enfoque de seu ensino-aprendizagem. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo.

Figueiredo, A. (2019). Probabilidade condicional em contexto de ensino aprendizagem. *Educação Matemática Pesquisa, 21*, 5, 544-554.

Gal, I. (2012). Developing probability literacy: Needs and pressures stemming from frameworks of adult competencies and mathematics curricula, 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul – Korea.

Gea, M. M., Gossa, A., Batanero, C., & Pallauta, J. (2020). Construcción y lectura de la tabla de doble entrada por profesores de Educación Primaria en formación. *Educação Matemática Pesquisa, 22*(1), 348-370.

Lahanier-Reuter, D. (2003). Différents types de tableaux dans l'enseignement des statistiques. *Spirale - Revue de Recherches en Éducation*, 32, 143-154.

Longen, A. (2016). *Matemática: padrões e relações: ensino médio* (1.ed.). São Paulo: Editora Brasil. Coleção matemática padrões e relações.

Articulação universidade-escola para o Desenvolvimento profissional de professores que ensinam estatística

Eurivalda Ribeiro Santana, Maria Elizabete Souza Couto

Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC)

Resumo

Este estudo faz parte de um projeto de pesquisa em rede, e tem como objetivo compreender como é efetivada a articulação entre a universidade e a escola (liderança universidade-escola) na perspectiva de professores que ensinam estatística e participaram do processo formativo, com vistas ao seu desenvolvimento profissional. Após o processo formativo, na escola, foi realizada uma entrevista com dois professores que participaram dos encontros e realizaram as atividades. Os dados foram analisados seguindo os princípios da Análise Textual Discursiva (ATD) e indicam a influência da liderança universidade-escola, no desenvolvimento do planejamento das atividades de estatística, a prática de ensino do professor, a relação com o conhecimento estatístico, a aprendizagem dos estudantes e, nas relações entre a universidade, a gestão escolar e os professores.

Palavras chave: Desenvolvimento profissional. Ensino de Estatística. Formação na escola. Liderança universidade-escola.

1. Introdução

Os estudos sobre formação de professores e desenvolvimento profissional vêm crescendo considerando várias perspectivas teóricas e metodológicas nos seus espaços de formação - a universidade e a escola. Considerando o contexto de cada uma das instituições, o movimento formativo que ali acontece e as demandas sobre o conhecimento do professor, principalmente na área de matemática, elaboramos um projeto de pesquisa em rede, que conta com a participação de pesquisadores de universidades das regiões Nordeste e Sudeste do Brasil. A pesquisa tem como objetivo geral compreender como uma intervenção formativa colabora com o desenvolvimento profissional dos professores de matemática do ensino fundamental (seus conhecimentos e ensino de estatística) e contribui para a aprendizagem dos conceitos estatísticos de seus estudantes. Um estudo que envolve os pesquisadores da universidade e os professores e coordenadores pedagógicos na escola.

Neste estudo, não apresentaremos o planejamento e o desenvolvimento da formação, vamos focalizar, para contextualizar nossa compreensão sobre o processo formativo, o material produzido nas entrevistas com os professores das escolas como tentativa para aprender as nuances da formação realizada tendo a articulação (liderança) como ‘ponte’ entre a universidade e a escola em todo o desenvolvimento das estratégias e ações formativas, bem como nas situações (im)possíveis. E, responder a questão de pesquisa: como é efetivada a articulação entre a universidade e a escola (liderança universidade-escola) na perspectiva de professores que ensinam estatística e participaram do processo formativo, com vistas ao seu desenvolvimento profissional?

Assim, o capítulo está organizado em quatro seções, começando com uma discussão sobre a escola e a universidade como instituições da formação e desenvolvimento profissional de professores; em seguida, o campo empírico, o que fizemos, com quem e como fizemos considerando o objetivo anunciado. As secções seguintes tratam da tentativa de compreender o movimento e o lugar de uma liderança que possa ser a 'ponte' entre a universidade e a escola para planejar, desenvolver, refletir e contribuir com a formação dos professores que ensinam conceitos estatísticos ou matemáticos. Por fim, as considerações enfatizando que a liderança influencia no planejamento das aulas dos professores de matemática na escola, acompanha a prática desses professores e os incentiva a refletir sobre a sua prática.

2. Escola e universidade na formação e desenvolvimento profissional de professores

O processo de formação do professor é um momento para a construção, mobilização, reflexão e análise dos conhecimentos adquiridos durante eventos da profissão, como estudos na universidade e na escola, em seminários, oficinas, cursos de pós-graduação ou atividades planejadas com análise das intercorrências, considerando as particularidades do processo formativo e das experiências construídas e socializadas no local de trabalho (Marcelo Garcia, 1999). Nesse sentido, a formação será legítima quando contribuir ao desenvolvimento profissional do professor melhorando o seu trabalho e suas aprendizagens profissionais (Imbernón, 2011).

O desenvolvimento profissional do professor resulta de processos formativos, quando os mesmos acontecem no contexto de sua prática e proporcionam enriquecimento, no âmbito moral e ético, para suas práticas e ajudam a desenvolver um conhecimento, quer seja do conteúdo, pedagógico, do estudante, do currículo, das políticas públicas, tecnológico para uso nas aulas. De modo que lhe atribua uma capacidade de avaliar, planejar, criar, recriar, modificar e refletir sobre suas estratégias educativas ou processos de formação permanente, para que os mesmos gerem um profissional mais ativo e participativo (Marcelo Garcia, 1999).

Atividades de desenvolvimento não afetam apenas o professor, mas àqueles com alguma responsabilidade ou implicação no aperfeiçoamento da escola e no desenvolvimento profissional e pessoal do professor (Marcelo Garcia, 1999). Têm-se uma conotação de evolução e continuidade que supera a justaposição entre a formação inicial e a continuada. Acontece no contexto em que o mesmo está mergulhado, o que nos faz pensar numa forma articulada, com dimensão de aliança produtiva, como denomina Anderson e Herr (1999), tendo como meta fortalecer áreas comuns e colaborar entre as duas culturas – a universidade e a escola, os professores pesquisadores e os professores na escola. É um campo colaborativo de aprendizagens a partir da experiência de cada um (Lüdke, 2001). É assim que surge o conceito de liderança universidade-escola que faz a 'ponte' com a universidade e a escola para construir as estratégias formativas e pedagógicas que, naquele momento, são necessárias às ações da docência que envolvem o planejamento do conhecimento da matéria e pedagógico e demais conhecimentos necessários à docência. Uma tentativa de criar condições para o desenvolvimento profissional.

Nessa condição, Day (2001) define o desenvolvimento profissional, não como sendo uma única coisa ou como tendo um único aspecto, mas, mostra uma visão holística desse desenvolvimento, como algo que interfere no professor como um todo, quando o entende como a soma dos desafios e constrangimentos que afetam sua capacidade para se empenhar profissionalmente e para desenvolver suas habilidades, de forma a melhorar a educação e os resultados escolares. O sentido de desenvolvimento profissional dos professores depende da história de suas vidas profissionais e pessoais, suas crenças e atitudes, das políticas públicas e contextos escolares nos quais realizam suas atividades docentes, considerando-as como oportunidades oferecidas aos professores em atividades formais e informais, que o encaminharão a revisar, renovar e aperfeiçoar seus pensamentos e ações e, sobretudo, seu compromisso profissional.

O desenvolvimento profissional vai além das práticas de formação, está presente nas ações do dia a dia do professor. É visto como estímulo ao crescimento pessoal e profissional e, também, a mudança nas relações de trabalho, pois promove o estabelecimento de um novo olhar sobre suas relações (Imbernón, 2011).

As atividades de desenvolvimento profissional, visando ao aumento da capacidade crítica, reflexiva parece ser uma possibilidade de promover a equidade no ensino e na sociedade (Zeichner, 2008). Tal condição flexibiliza a profissão e o profissional e, torna possível a convivência com o trabalho realizado nas diferentes modalidades de ensino, bem como na coordenação e na gestão (Day, 2001).

Pensar na formação e no desenvolvimento profissional para o ensino de Matemática (especialmente os conteúdos de Estatística) vai para além da questão conceitual, mas numa perspectiva de formar professores de Matemática que estejam preparados para "trabalhar dentro e fora da sala da aula a fim de mudar as desigualdades que existem tanto no ensino quanto na sociedade como um todo" (Zeicnher, 2008, p. 17).

3. O campo empírico

Este trabalho é um recorte de uma pesquisa mais ampla, de caráter qualitativo, desenvolvido em rede com universidades públicas da região Nordeste e Sudeste do Brasil.

A pesquisa está sendo desenvolvida em escolas do ensino fundamental I e II, com professores que lecionam Matemática, e conteúdos de Estatística. Participam da pesquisa os coordenadores pedagógicos e articuladores da área de ensino de Matemática na escola. Este articulador (liderança universidade-escola) é licenciado em Matemática e tem a função de fazer a mediação e articulação entre o grupo de pesquisa na Universidade, nesse caso, o Grupo de Pesquisa em Ensino de Matemática, Estatística e Ciências (GPEMEC), os professores de Matemática na escola, os coordenadores pedagógicos e direção escolar.

Para a produção do material empírico foram realizadas entrevistas com dois professores que lecionam Matemática no ensino fundamental II.

Para a análise dos dados usamos a Análise Textual Discursiva (ATD) (Moraes & Galiazzi, 2011) como método para compreender o movimento desenvolvido durante o processo formativo na escola, que envolve pesquisadores da universidade, professores e coordenadores pedagógicos. A ATD é uma metodologia que envolve três fases: unitarização, categorização e metatexto. Neste estudo, serão apresentadas as categorias que surgem da segunda fase da ATD, não será apresentada a terceira fase.

Com a leitura das entrevistas, desmontamos o texto para compreender as falas dos professores e encontrar as unidades de análise. Estas retratam o significado e o sentido do movimento da articulação universidade-escola para a formação. O significado é um sistema de relações que se formou no processo histórico e que se encerra na palavra, da mesma forma para todas as pessoas (Luria, 1986). Está ligado a experiência social e a um conjunto de relações. O sentido apresenta um caráter individual, mas tem relação diferente para cada pessoa, nesse caso, na situação de formação na escola (Luria, 1986).

Desmontados os relatos das entrevistas, captamos as unidades de análises e constituímos as categorizações foram submetidas à interpretação que buscou compreender a luz do referencial teórico, as ações da liderança universidade-escola. Pela natureza desse trabalho elegemos as questões norteadoras para proceder a análise: como foi realizada a articulação da liderança universidade-escola? E, qual(is) a(s) influência(s) da liderança universidade-escola no planejamento e na prática docente?

4. A liderança na escola

Na tentativa de compreender se articulação entre a universidade e os gestores da escola (coordenação e direção) influencia no desenvolvimento das atividades em sala de aula, a análise indicou elementos articuladores evidenciados nas respostas dos professores: nas relações da liderança com os gestores escolares e coordenação; e, nas relações com os professores.

As categorias foram determinadas pela letra 'C' seguida pelo número que refere a cada uma delas (ver Quadro1 e 2). A articulação feita entre a universidade e os gestores da escola (coordenação e direção) influencia no desenvolvimento das atividades em sala de aula.

Quadro 1- A relação liderança com direção da escola e coordenação com os professores

C1: Relação com os gestores	**C2: Relação entre coordenação e professores**
C1.1: construção	C2.1: vencer desafios
C1.2: confluência	C2.2: representa a universidade
C1.3: integração	C2.3: motivação e confiança
C1.4: diálogo	C2.4: diálogo
C1.5: parceria	C2.5 divide tarefas
C1.6: colaboração e apoio	

Fonte: Elaborado pelas autoras (2020).

Os dois professores indicaram em suas respostas itens que elencam as categorias apresentadas no Quadro 1. Como resultados prévios das análises realizadas até o momento, podemos inferir que: C1) a liderança contribui na construção, integração, diálogo, confluência, parceria, colaboração e apoio fazendo as parcerias necessárias com os coordenadores pedagógicos e com a direção da escola, para alcançar os objetivos propostos no currículo escolar e a proposta do processo formativo; C2) a liderança desenvolve, com a gestão da escola, um papel no qual possibilita vencer desafios postos para a organização das atividades de investigação possibilitando um novo olhar para o ensino e a aprendizagem dos conceitos estatísticos. Representa a universidade na escola, divide tarefas, bem como motiva a equipe de coordenadores e professores para o desenvolvimento das ações.

5. Atuação e influência da liderança no planejamento e na prática

Em relação a influência da liderança universidade-escola para o planejamento das atividades estatística, a serem desenvolvidas em sala de aula, a análise indicou as seguintes categorias teóricas, conforme o Quadro 2: C3) Influência: diagnóstico da aprendizagem dos estudantes, inovação da prática, mudança na prática de ensino, mudança no comportamento dos estudantes, na compreensão do processo de ensino do conceito estatístico, na reflexão sobre a prática; C4) Planejamento: responsabilidade e diálogo; C5) Apresenta: desafios, orientação, confiança para desenvolver as atividades na escola e apoio para as decisões dos professores.

Quadro 2- Planejamento e acompanhamento da prática

C3: Influência	**C4: Planejamento**	**C5: Apresenta**
C3.1: diagnóstico da aprendizagem dos estudantes C3.2: inovação da prática C3.3: mudança na prática de ensino C3.4: mudança no comportamento dos estudantes C3.5: na compreensão do processo de ensino do conceito estatístico C3.6: na reflexão sobre a prática	C4.1: responsabilidade C4.2: diálogo	C5.1: desafios C5.2: orientação C5.3: confiança para desenvolver as atividades na escola C5.4: apoio para as decisões dos professores

Fonte: Elaborado pelas autoras (2020).

A análise inicial sugere evidências que a liderança universidade-escola, influencia no planejamento ao dialogar com os professores e a coordenação pedagógica, sobre a necessidade de inserção dos conteúdos de estatística ao longo do ano letivo. Essas inserções são recebidas como desafios para os professores que não estão acostumados a trabalhar com esses conteúdos e nem com a investigação para desenvolver o pensamento científico e crítico, o que mobiliza o interesse e participação ativa dos estudantes.

Quadro 3- Relação entre universidade e professores e, com os professores

C6: Acompanha os professores
C6.1: trata os professores igualmente C6.2: articuladora (as ações do grupo de pesquisa com os professores) C6.3: realiza os planejamentos, acompanha e avalia as aulas

Fonte: Elaborado pelas autoras (2020).

A relação entre a universidade, professores e entre os próprios professores foi indicada na fala dos professores e categorizamos como apresentado no Quadro 3: C6) Acompanha os professores: trata os professores igualmente; articula as ações do grupo de pesquisa com os professores, na escola e na universidade e; realiza o planejamento, acompanha, avalia as aulas e reflete sobre a ação desenvolvida e as aprendizagens dos estudantes e os professores.

6. Considerações finais

Esses são resultados iniciais que indicam sinais positivos das ações efetivadas pela articulação e movimento da liderança universidade-escola, para o desenvolvimento profissional de professores que ensinam estatística. A liderança influencia no planejamento das aulas dos professores de matemática na escola, acompanha a prática desses professores e os incentiva a refletir sobre a sua prática de ensino. São ações que vão além das práticas de formação, se constituem em ações do dia a dia do professor, no planejamento e reflexão de sua prática, na tentativa de promover o desenvolvimento pessoal e profissional e, também, contribui com a mudança nas relações de trabalho na escola e na universidade, promovendo um novo olhar sobre sua formação e as instituições formadoras (Day, 2001; Imbernón, 2011).

O ensino de estatística passa a ser refletido, desde o seu planejamento, ao diagnóstico da aprendizagem dos estudantes, a prática de ensino realizada nas salas de aula e a aprendizagem dos estudantes, visando o desenvolvimento do pensamento crítico, científico e reflexivo como possibilidade de promover a equidade no ensino e na sociedade, que avança da questão conceitual (estatística) para o planejamento e desenvolvimento de ações pedagógicas dentro e fora da sala de aula para minimizar as desigualdades sociais (Zeicnher, 2008). Esses resultados serão mais delineados com o aprofundamento das análises.

Referências

Anderson, G.; Herr, K. (1999). The new paradigm wars. Is there room for rigorous practitioner knowledge in schools and universities? *Educational Researcher,* v. 28, n. 5, p. 12-40, jun/jul.

Day, C. (2001). *Desenvolvimento profissional de profesores*: O desafio da Aprendizagem permanente. Porto: Porto Editora.

Imbernón, F. (2011). *Formação docente e profissional*: Forma-se para a mdança e incerteza. São Paulo: Cortez.

Lüdke, M. (2001). O professor, seu saber e sua pesquisa. *Revista Educação e Sociedade,* v. 22, n. 74, Campinas.

Luria, A. R. (1986). *Pensamento e linguagem.* As últimas conferências de Luria. Porto Alegre: Artes Médicas.

Marcelo Garcia, C. (1999). *Formação de Professores*: para uma mudança educativa. Porto: Porto Editora.

Moraes, R.; Galiazzi, M. do Carmo. (2011). *Análise Textual Discursiva.* 2 ed, Ijuí: Unijuí.

Zeichner, K. M. (2008). Formação de professores para a justiça social, em tempos de incerteza e desigualdades crescentes. In: Diniz-Pereira, J. E; Zeichner, K. M. *Justiça Social.* Desafio para a formação de professores. Belo Horizonte: Autêntica.

Análisis de la idoneidad didáctica de proyectos estadísticos como recurso formativo de futuros profesores

Carmen Batanero, María M. Gea y Pedro Arteaga
Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo se describen algunas experiencias de formación que han permitido evaluar y desarrollar diferentes componentes del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores en estadística. El modelo de investigación sobre Conocimientos y Competencias Didáctico Matemáticas (CCDM) del profesor, propuesto en el enfoque ontosemiótico, se muestra como recurso formativo de gran utilidad, de entre los modelos utilizados en la investigación sobre formación del profesor de matemáticas. Se describen brevemente resultados del análisis de la idoneidad didáctica por parte de los participantes en los proyectos estadísticos que fundamentan las experiencias de formación diseñadas.

Palabras clave: Conocimiento didáctico-matemático; idoneidad didáctica, formación de profesores de estadística.

1. Introducción

Uno de los problemas primordiales en la enseñanza de la estadística es la formación de los profesores que imparten la materia, pues no todos ellos han adquirido suficientes conocimientos de estadística o de enseñanza de la estadística en su formación inicial (Batanero & Díaz, 2010). Como consecuencia, la formación de los profesores que deben enseñar estadística se ha convertido en un área importante de investigación en educación estadística, a partir del estudio conjunto sobre el tema organizado por ICMI e IASE (Batanero, Burrill, & Reading, 2011).

Estas investigaciones se apoyan en diferentes marcos teóricos que analizan y detallan el conocimiento del profesor de matemáticas. Uno de estos marcos, desarrollado como parte del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), es el modelo del conocimiento didáctico-matemático, ampliado posteriormente para incluir las competencias y conocimientos (Godino, Giacomone, Batanero, & Font, 2017; Pino-Fan & Godino, 2015).

En este trabajo se comienza presentando un resumen del modelo de conocimiento didáctico-matemático del profesor y de la teoría de la idoneidad didáctica y sus diferentes componentes. A continuación, se describen algunas experiencias formativas en las que los futuros profesores deben trabajar con un proyecto estadístico y, posteriormente, analizan la idoneidad didáctica de dicho proyecto. Se finaliza con algunas reflexiones y sugerencias de líneas de investigación.

2. El modelo de conocimiento didáctico-matemático

En la investigación sobre el conocimiento del profesor para la enseñanza de las matemáticas encontramos diversos modelos teóricos (Godino et al., 2017; Hill, Ball, & Schilling, 2008; Shulman, 1986) que describen sus diferentes componentes. El modelo propuesto en el enfoque ontosemiótico (Godino et al., 2017; Pino-Fan & Godino, 2015) incluye tanto los conocimientos como las competencias que un profesor pone de manifiesto en el diseño, análisis e intervención didáctica. En este trabajo centramos la atención en los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor, que en el EOS se describen según tres dimensiones: matemática, didáctica y metadidáctica. En este trabajo nos restringimos a las dos primeras. La dimensión matemática incluye el conocimiento común y ampliado. La dimensión didáctica consta de las facetas siguientes (Figura 1):

- *Faceta epistémica:* conocimiento especializado sobre el contenido; por ejemplo, los tipos de problemas que pueden plantearse sobre el mismo, los cuales implican diferentes significados para los objetos de conocimiento. Incluye el conocimiento especializado del contenido de Hill, Ball, & Schilling (2008).
- *Faceta cognitiva*: conocimiento sobre el aprendizaje, forma de conocer, dificultades, estrategias y razonamientos de los estudiantes respecto al tema.
- *Faceta afectiva:* incluye comprender los aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y creencias de los estudiantes en relación al contenido. Esta faceta, junto con la cognitiva se asimilan al conocimiento de la matemática y el estudiante del modelo de Hill, Ball & Schilling (2008).
- *Faceta interaccional:* dominio de la forma de establecer las interacciones en la clase para facilitar el aprendizaje, evaluar y resolver las posibles dificultades de los estudiantes.
- *Faceta mediacional*: recursos tales como libros, materiales didácticos, tecnología y tiempo dedicado a la enseñanza, que pueden favorecer el aprendizaje del tema. Esta componente y la anterior se pueden comparar con el conocimiento del contenido y la enseñanza en el modelo de Hill, Ball, & Schilling (2008).
- *Faceta ecológica*: relaciones del contenido con otros objetos matemáticos o de otras materias, con el currículo y con la sociedad. Es una componente algo más amplia que el conocimiento del contenido y el currículo en el modelo de Hill, Ball, & Schilling (2008).

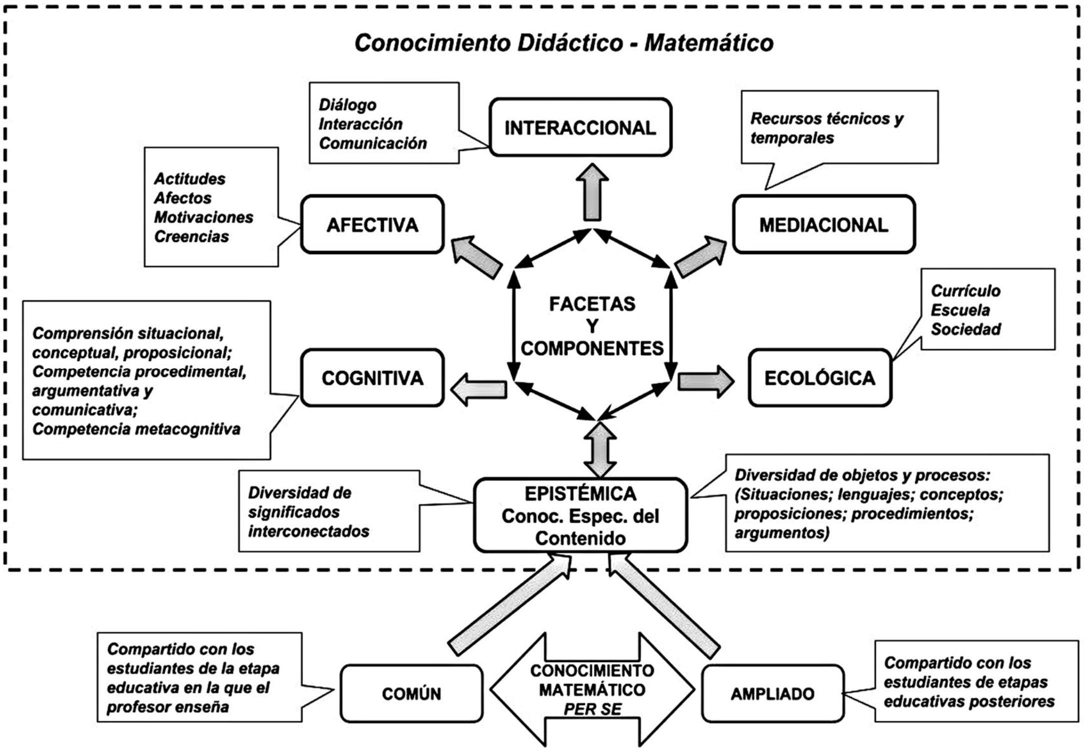


Figura 1. Facetas y componentes del conocimiento del profesor
Fuente: Godino et al. (2017, p. 96)

3. La idoneidad didáctica y su análisis como recurso en la formación de profesores

Las facetas del conocimiento didáctico-matemático guardan estrecha relación con las del mismo nombre de la idoneidad didáctica, que es un concepto introducido en el EOS para analizar los procesos de instrucción en matemáticas (Godino, 2009; 2013).

Se considera que un proceso es más o menos idóneo (o adecuado) si facilita la adaptación de los significados personales que construyen los estudiantes respecto a un tema particular (aprendizaje) a los institucionales (enseñanza) fijados para dicho tema, teniendo en cuenta las restricciones del proceso de estudio. La idoneidad didáctica no es un proceso unitario, sino que está constituida de diferentes componentes, cada una de las cuales puede adaptarse mejor o peor a lo esperado por la institución de enseñanza.

Se incluyen en la idoneidad didáctica las componentes epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica, cada una de las cuales relacionada de forma paralela con los componentes descritos anteriormente del modelo de conocimiento didáctico-matemático. Por ejemplo, la idoneidad afectiva es el grado en que un proceso de estudio tiene en cuenta los intereses, emociones y actitudes de los estudiantes.

Para valorar cada una de las componentes de la idoneidad de un proceso de estudio, Godino (2013) propone una serie de indicadores para cada una. Como ejemplo, en la Tabla 1 mostramos los componentes e indicadores de la componente de idoneidad afectiva, que nosotros hemos reformulado en forma de pregunta para utilizar en los cursos de formación de profesores.

Tabla 1. Pauta de análisis de la idoneidad afectiva

Componentes	Indicadores
Intereses y necesidades	I1. ¿Piensas que las tareas tienen interés para los alumnos?
	I2. Las tareas propuestas ¿permiten valorar la utilidad de las matemáticas en la vida cotidiana y profesional?
Actitudes	I3. ¿Se promueve la participación de los estudiantes en las actividades, la responsabilidad, etc.?
	I4. ¿Se favorece la argumentación en situaciones de igualdad; el argumento se valora en sí mismo y no por quién lo dice?
Emociones	I5. ¿Promueve la enseñanza efectuada la autoestima, ayudando a evitar el rechazo, fobia o miedo a las matemáticas?
	I6. ¿Se resaltan las cualidades estéticas de las matemáticas? ¿Qué otras actitudes o emociones positivas hacia las matemáticas permitiría desarrollar?

Fuente: Elaboración propia

4. Experiencias de formación de profesores mediante el análisis de la idoneidad didáctica

Algunas de nuestras investigaciones se han basado en el modelo de conocimiento didáctico-matemático del profesor, descrito anteriormente, y se ha utilizado la valoración de la idoneidad didáctica como recurso en la evaluación y desarrollo de todas o parte de las facetas del conocimiento del profesor sobre un cierto contenido estadístico. Desde el punto de vista metodológico, se ha trabajado con los profesores en tres fases diferentes:

- Trabajo con una situación didáctica orientada a la enseñanza de uno o varios temas estadísticos; generalmente, esta situación didáctica toma la forma de proyecto, que el futuro profesor debe resolver, y posteriormente puede utilizar con sus estudiantes.
- Discusión en clase con el formador de profesores de las soluciones en la fase anterior y análisis por parte de los futuros profesores de la idoneidad didáctica de la situación didáctica o proyecto.
- Discusión final sobre el concepto de idoneidad didáctica, sus componentes, cómo se ponen de manifiesto en el proceso formativo y cómo se puede potenciar en la situación didáctica o proyecto desarrollado.

Por ejemplo, en la tesis de Arteaga (2011) se parte de un proyecto estadístico titulado *Comprueba tus intuiciones sobre el azar*, en el que una muestra de futuros profesores de educación primaria tuvieron que recoger los datos a través de un experimento aleatorio y posteriormente comparar tres pares de variables estadísticas para concluir sobre las intuiciones del conjunto de la clase sobre los fenómenos aleatorios. En primer lugar, se utilizaron las producciones desarrolladas por los futuros profesores en este proyecto para evaluar y desarrollar su conocimiento sobre gráficos estadísticos (conocimiento común y ampliado). Este análisis mostró carencias de conocimiento en los participantes en el estudio. Por ejemplo, menos de la mitad de los gráficos construidos fueron correctos, cometiendo errores como escalas demasiado amplias o no proporcionales a los datos. Además, alrededor de un 30% de los que construyeron un gráfico fueron capaces de interpretarlo correctamente.

En una segunda etapa, y una vez corregidas colectivamente las soluciones al proyecto, los futuros profesores realizaron un análisis de la idoneidad didáctica del mismo. El estudio cualitativo sistemático de las producciones de los futuros profesores al analizar las componentes de la idoneidad didáctica ha dado lugar, entre otros, a los trabajos de Arteaga, Batanero, Cañadas y Gea (2012), Arteaga, Batanero y Gea (2017) o Arteaga, Contreras y Cañadas (2014). Los resultados de estos estudios muestran un conocimiento didáctico escaso de los futuros profesores de la muestra; por ejemplo, tienen dificultades en identificar los objetos matemáticos trabajados en el proyecto, y por tanto de valorar lo que han aprendido los estudiantes. Fueron mejores los resultados al valorar la idoneidad afectiva, aunque también mostraron dificultades para reconocer los posibles errores de los estudiantes, ya que ellos también los cometían.

Otro ejemplo es la tesis de Gea (2014), donde se trabaja con futuros profesores de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato un proyecto orientado al estudio de la correlación y regresión. El proyecto estuvo centrado en el análisis de las variables que influyen en la esperanza de vida al nacer y se trabajó con datos reales tomados de las Naciones Unidas. Las variables utilizadas en el proyecto son indicadores internacionales de desarrollo humano y se seleccionaron teniendo en cuenta resultados de la investigación previa sobre compresión de la correlación y regresión, según los factores que inciden en la dificultad de estas tareas. Se incluyeron correlaciones directas e inversas, fuertes y débiles, independencia, así como relación lineal y no lineal.

En este caso, los futuros profesores mostraron mejor conocimiento del contenido al ser licenciados o ingenieros, aunque todavía algunos dudaron en la interpretación de algunos gráficos o resúmenes estadísticos. Finalizadas y corregidas colectivamente las situaciones planteadas en el proyecto, su idoneidad didáctica fue analizada por los futuros profesores. De ello se han obtenido publicaciones como las de Gea, Batanero, Arteaga y Estepa (2019) y Gea, Batanero y Estrada (2019). También el análisis de la idoneidad didáctica fue más completo en este grupo de profesores que en la investigación de Arteaga (2011), aunque mostraron carencias en la componente cognitiva de la idoneidad didáctica.

En ambas investigaciones, el análisis cualitativo de las producciones de los participantes se ha completado con la asignación de puntuaciones numéricas a sus respuestas, lo que ha permitido valorar cuantitativamente la calidad del conocimiento del futuro profesor en cada componente e indicador de las diferentes facetas de la idoneidad didáctica.

Además, las experiencias de enseñanza a modo de proyecto permitieron introducir a los futuros profesores al análisis didáctico y motivar la preocupación por reforzar las diferentes facetas del conocimiento didáctico-matemático sobre la estadística.

5. Reflexiones y líneas de investigación

Los ejemplos citados de investigaciones han mostrado la utilidad del modelo de conocimiento didáctico-matemático para evaluar y desarrollar los conocimientos de futuros profesores sobre estadística. Este modelo amplía otros previos y ofrece mayor riqueza en el análisis de los datos, según investigaciones relacionadas. Aunque ya se ha avanzado en el estudio de los conocimientos del profesor para enseñar estadística desde el modelo del conocimiento didáctico-matemático en temas como los gráficos estadísticos o la correlación y regresión, pensamos que esta línea de investigación está muy poco explotada.

Es posible y deseable centrarse en el análisis de otros objetos estadísticos, como la dispersión, la variable aleatoria o el muestreo, cuya enseñanza se contempla en los currículos de Educación Primaria, Secundaria o Bachillerato, para estudiar tanto el conocimiento matemático del profesor como su conocimiento didáctico. Para ello, sería interesante diseñar otros proyectos estadísticos que pongan en relieve tales objetos.

Por otro lado, sería necesario mejorar o adaptar la pauta de evaluación de la idoneidad didáctica para su uso específico en temas de estadística o probabilidad, en la línea de Godino, Rivas y Arteaga (2014) o Beltrán-Pellicer, Godino y Giacomone (2018).

Sería también interesante la elaboración de trabajos comparados en diferentes países, replicando en otro contexto algunas de nuestras investigaciones para ampliar la generalizabilidad de los resultados obtenidos en España.

Agradecimientos: Proyecto PID2019-105601GB-I00 (MICIN) y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G., & Gea. M. (2012). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico. *Educaçao Matemática Pesquisa. 14*(2), 279-297.

Arteaga, P., Batanero, C., & Gea, M. M. (2017). La componente mediacional del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre estadística: un estudio de evaluación exploratorio. *Educação Matemática Debate, 1*(1), 54-75.

Arteaga, P. Contreras, J. M., & Cañadas, G. (2014). Conocimiento de la estadística y los estudiantes en futuros profesores: un estudio exploratorio. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *6*, 63-84. DOI: https://doi.org/10.35763/aiem.v1i6.97

Batanero, C., Burrill, G., & Reading, C. (Eds.). (2011). *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE study*. New York: Springer.

Batanero, C., & Díaz, C. (2010). Training teachers to teach statistics: what can we learn from research? *Statistique et Enseignement, 1*(1), 5-20.

Beltrán-Pellicer, P., Godino, J. D., & Giacomone, B. (2018). Elaboración de indicadores específicos de idoneidad didáctica en probabilidad: aplicación para la reflexión sobre la práctica docente. *Bolema, 32*(61), 526-548.

Gea, M.M. (2014). *La correlación en Bachillerato: análisis de libros de texto y del conocimiento de futuros profesores.* Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Gea, M. M., Batanero, C., Arteaga, P., & Estepa, A. (2019). Conocimiento especializado de correlación y regresión en futuros profesores de educación secundaria. *Profesorado, 23*(2), 397-419. DOI: https://doi.org/10.30827/profesorado.v23i2.9693

Gea, M. M., Batanero, C., & Estrada, A. (2019). Evaluación de la componente afectiva del trabajo con proyectos estadísticos por futuros profesores *Acta Scientiae*, *21*(3)

112-130. DOI: 10.17648/acta.scientiae.v21iss3id5092

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas, *UNION*, *20*, 13-31.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11*(1), 111-132.

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Godino, J., Rivas, H., & Arteaga, P. (2014). Suitability criteria for teachers' education programs in mathematics and statistics education. En K. Makar, B. de Sousa y R. Gould (Eds.), *Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics* Voorburg: International Statistical Institute.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*, 372-400.

Pino-Fan, L. R., & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 3-14.

Capacidad de lectura e interpretación de gráficos estadísticos en diarios y revistas: una aproximación en futuros docentes portugueses e italianos

José A. Garzón-Guerrero

Universidad de Granada

Resumen

La actual sociedad de la información en la que estamos inmersos hace que sea de fundamental importancia el saber leer e interpretar datos estadísticos que nos llegan generalmente a través de los medios de comunicación y que muchas veces vienen en la forma de gráficos estadísticos. Como formadores de los ciudadanos del mañana, los futuros docentes deberían poseer unas capacidades de lectura e interpretación gráfica acordes a sus labores educativas. En este trabajo se muestra un estudio preliminar sobre la evaluación de esas capacidades en futuros profesores de Italia y Portugal. Los resultados arrojan ciertas carencias en la formación estadística que dificulta una interpretación y lectura completa y crítica de los gráficos de la prensa.

Palabras clave: gráficos estadísticos, errores y dificultades, cultura estadística, futuros profesores.

1. Introducción

2. Marco teórico

Es indiscutible que en la actualidad los ciudadanos estamos bajo un constante aporte de información que proviene de diferentes fuentes, sobre todo de los medios de comunicación, tanto tradicionales como digitales. Una gran parte de dicha información nos llega en forma de resultados estadísticos, más fáciles de entender y que aportan rigor y seriedad a la información expuesta. Pero a veces esto no siempre ocurre y es necesario que el individuo sea crítico y que posea las adecuadas herramientas y conocimientos en estadística para poder desenvolverse con soltura a la hora de interpretar esas informaciones o detectar posibles sesgos en ellas (Batanero, Díaz, Contreras y Roa, 2013; Contreras y Molina-Portillo, 2019). Es lo que en la literatura se denomina cultura o alfabetización estadística e involucran las capacidades y habilidades de entender y evaluar críticamente los resultados estadísticos que aparecen en la vida cotidiana (Batanero, 2002).

La interpretación de gráficos estadísticos elementales es, en particular, una de las habilidades fundamentales que una persona con una adecuada cultura estadística debiera tener en una sociedad marcada por los avances tecnológicos y la transmisión inmediata de la información, debido en parte a que son autoexplicativos (Sharma, 2013). Esa interpretación no puede limitarse a una lectura literal de las partes del gráfico, sino que además se debe interpretar y realizar una lectura crítica de la información estadística

incluida y también formular y comunicar a otros opiniones y conclusiones sobre dicha información (Gal y Murray, 2011).

La enseñanza de los gráficos es un tema habitual en los currículos de matemáticas de la mayor parte de los países del mundo, en todos los niveles preuniversitarios (Arteaga, Batanero, Contreras y Cañadas, 2016). Sin embargo, la lectura de gráficos que se realiza en estos niveles es una tarea bastante restringida a diferencia de las necesidades que pueden aparecer en el mundo real. En clase se centran más en la respuesta matemáticamente correcta y a menudo descontextualizada mientras que fuera del ámbito académico es necesario conocer tanto el contexto como el contenido (Watson y Fitzallen, 2010; Montero y Ainley, 2007). Es por eso que uno de los sectores de la población donde es más importante la necesidad de poseer una adecuada cultura estadística, incluyendo los gráficos, son los profesores o los que algún día llegarán a serlo, ya que de ellos depende que el resto de los ciudadanos adquieran todas las competencias estadísticas adecuadamente. Son varios los trabajos en la literatura que abordan esta temática. En Monteiro y Ainley (2007) se estudia la lectura de gráficos de la prensa diaria en futuros profesores, llegando a la conclusión de que muchos no poseían suficiente conocimiento matemático para poder leerlos, y muchos de los que sí lo hacían luego no eran capaces de interpretarlos correctamente y de leerlos críticamente. En Molina-Portillo, Contreras, Godino y Díaz-Levicoy (2017), se da importancia a la interpretación crítica de datos a través de gráficos elementales publicados en medios digitales. En general, los estudios existentes coinciden en que, a pesar de la importancia que tiene la interpretación de la información estadística a través de gráficos, se observan bastantes dificultades y errores en dicha interpretación y pueden existir sesgos, intencionados o no, que la compliquen aún más (Arteaga et al., 2016).

Uno de los objetivos de este trabajo es evaluar la competencia de interpretación de algunos gráficos estadísticos en futuros profesores de Primaria y Secundaria de Italia y Portugal y su comparación con trabajos similares realizados en España. Los resultados podrán servir para la creación de actividades formativas acerca de la comprensión gráfica de la estadística (Gea, Arteaga y Cañadas, 2017).

Los gráficos estadísticos son objetos semióticamente complejos, que exigen al lector varios procesos de interpretación, comenzando por el análisis de elementos estructurales del gráfico, pasando por la percepción de las variables y escalas que aparecen y finalizando con las conclusiones sobre los niveles de cada variable y su relación con la realidad que se busca representar (Arteaga, Batanero y Contreras, 2011).

Para este trabajo preliminar, nos centraremos en la adquisición de las competencias fundamentales para la comprensión del lenguaje gráfico. Según Friel, Curcio y Bright (2001) se requieren las siguientes destrezas para ello:

- Reconocer los componentes estructurales del gráfico y sus relaciones: distinguir cada una de estas componentes e interpretarlas y si son apropiadas.
- Percibir el impacto de dichas componentes sobre la presentación de la información: por ejemplo, predecir el cambio del gráfico si cambiase la escala, o percatarse de si la escala usada es incorrecta por no ser proporcional.

- Traducir las relaciones reflejadas en el gráfico a los datos que se representan en el mismo y viceversa: por ejemplo, relacionar las variables entre sí, o interpretar la información que se presenta.
- Reconocer si un gráfico es más adecuado que otro: elegir el gráfico adecuado al tipo de variable que se está representando.

Se utilizarán estas competencias en este trabajo para estudiar la comprensión gráfica en futuros docentes.

Una muestra de 52 futuros docentes de Educación Primaria y Secundaria, 29 en Portugal (de la Universidade de Tras-os-Montes e Alto Douro, Vila-Real) y 23 en Italia (de la Universitá Roma III, Roma) fue utilizada para este estudio. Entre los participantes, la mayoría eran alumnos del último curso de sus estudios, equivalente a un máster de formación del profesorado en España. El resto estaban cursando un doctorado en educación. En Italia se unieron tres profesores en activo dentro de su primer año de docencia. Se eligieron tres tipos de gráficos diferentes: de barras, de líneas y de sectores. Cada uno de los tipos de gráfico fue escogido de forma particular para cada país, lo que requirió un exhaustivo trabajo previo de búsqueda en la prensa nacional de cada estado participante. Se realizó una investigación entre los medios de comunicación escritos y digitales de ambos países, buscando gráficos adecuados para su estudio, centrándose en encontrar aquellos que poseyeran algún tipo de error o sesgo de construcción para comprobar las competencias en la lectura e interpretación de los diagramas. Sólo el de sectores se tratará en este informe. En la Figura 1 se pueden observar los casos elegidos de este tipo de gráficos para los alumnos de Italia y Portugal.

Se crearon cuestionarios con los diferentes tipos de gráficos que se distribuyeron a los participantes y constaban de cuatro cuestiones que debían de responder sobre de los diagramas, relacionadas con las cuatro competencias gráficas de Friel et al. (2001):

P1. Descripción del gráfico: describir el tipo de gráfico, variables, criterio para mostrar la información…

P2. ¿Puede encontrar algún sesgo o error en el gráfico?

P3. ¿Qué información relevante puede extraer del gráfico?

P4. ¿Confía en el medio de comunicación del gráfico? ¿Considera que es el mejor tipo de gráfico para explicar la información? Aporte otro si lo desea.

3. Metodología

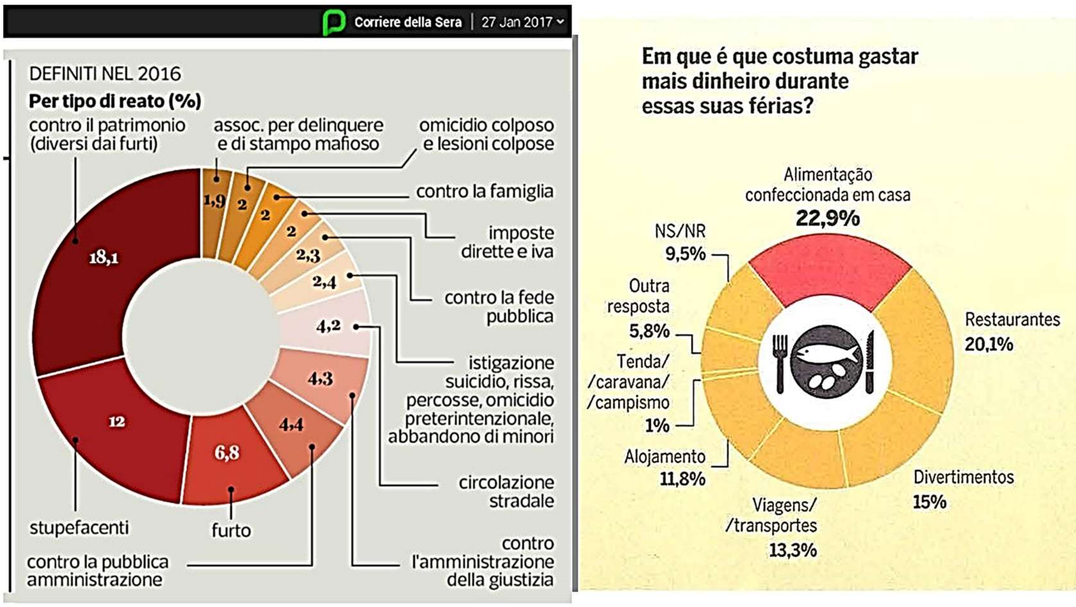


Figura 1. Gráfico de sectores para la prueba en Italia (izquierda, *Corriere della Sera, 27 enero 2017, pág. 2*) y en Portugal (derecha, *Visão, 20 agosto 2009, pág. 85*).

4. Resultados y discusión

De todos los tipos de gráficos escogidos para los cuestionarios únicamente se considerarán las respuestas al caso de diagrama de sectores en este trabajo, dejando el resto para una posterior ampliación del estudio. De acuerdo a la primera de las preguntas formuladas, se puede comprobar que ambos son diagramas de sectores bidimensionales. En el caso del gráfico de Italia (Figura 1, izquierda) representa el porcentaje de juicios celebrados en un año clasificados por tipo de delito, mientras que en el extraído de la prensa portuguesa (Figura 1, derecha) aparece cuál es el mayor gasto de los veraneantes en sus vacaciones. En los dos diagramas hay errores de construcción, ya que en un diagrama de sectores sería esperable que la suma total de todas sus categorías sea de un 100%, lo cual no ocurre en los ejemplos elegidos (62,4% en el caso de Italia y 99,4% en el de Portugal) y puede llevar a confusión. Es un sesgo típico en esta clase de gráficos (Molina-Portillo, Martínez-Ortiz, Garzón-Guerrero y Arteaga-Cezón, 2020). El número de clases mostradas es excesivo en el primer caso. Para la tercera y cuarta preguntas, hay que decir que a los participantes se les entregó el gráfico descontextualizado, para posteriormente mostrarles la página de la noticia completa, verificando si la interpretación que habían hecho era la misma que la que habían realizado los periodistas. En cuanto a la última cuestión, ambos gráficos podrían ser mejorados, disminuyendo el número de clases o usando un diagrama barras en el primer caso, y cambiando los colores del resto de las clases en la segunda imagen.

En una primera aproximación al estudio estadístico, se ha realizado un análisis chi-cuadrado entre los resultados de los dos países para comprobar si las distribuciones eran semejantes. El p-valor resultante era mayor que 0,05 en todos los casos, lo que indica que entre las respuestas de los participantes en ambos países no existen diferencias estadísticamente significativas.

Los resultados de las respuestas consideradas como correctas para las descripciones del gráfico de sectores se muestran en la Figura 2 y en la Tabla 1. Señalar que las preguntas no respondidas se han considerado como incorrectas.

Tabla 1. Descripciones correctas para gráfico de sectores (% respecto a la muestra).

	P1 (%)	P2 (%)	P3 (%)	P4 (%)
Italia	73,9	26.1	65.2	17.4
Portugal	69.0	17.2	65.5	10.3
Total	**71.2**	**21.2**	**65.4**	**13.5**

En la Figura 2 se evidencia que los resultados son muy semejantes entre ambos países, con una puntuación ligeramente más alta en el caso italiano, que puede deberse a la presencia de docentes en activo. Se puede observar en la Tabla 1, que una gran parte de los evaluados (71.2%) pudieron describir el tipo de gráfico, variable y parámetro de representación (amplitud). También la mayoría, aunque en menor proporción (un 65.4%), fueron capaces de extraer información útil de los mismos. Sin embargo, muy pocos fueron capaces de detectar errores o sesgos. En el caso del primer gráfico, sólo el 26% de los individuos Y todavía menor es la cantidad de personas (13.5%) que cambiaría el tipo de gráfico por otro más adecuado y que además lo aportase. Un hecho llamativo es que ninguno de los que confiaban en el medio de comunicación del gráfico cambiarían el tipo de diagrama.

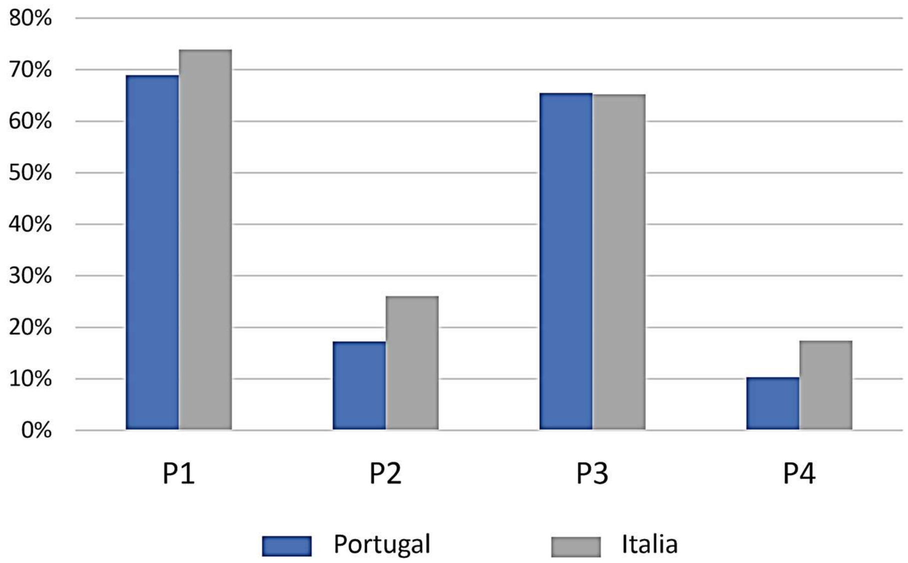


Figura 2. Respuestas correctas (% respecto a la muestra) para las cuatro preguntas realizadas con respecto a los gráficos de sectores para la prueba en Portugal (azul) e Italia (gris).

Los resultados obtenidos son semejantes a otros trabajos similares realizados entre estudiantes o futuros profesores, tanto en España como en otros países, en los que muchos de los participantes no tienen capacidades matemáticas y estadísticas suficientes para realizar una lectura crítica de los gráficos (Pérez-Echeverría, Postigo y Marín, 2018; Monteiro y Ainley, 2007).

En Molina-Portillo, Contreras, Godino y Díaz-Levicoy (2017) y en Arteaga, Batanero, Contreras y Cañadas (2016) también observaron dificultades a la hora de trabajar con gráfico estadísticos, tanto en estudiantes como en futuros profesores españoles.

5. Conclusiones

Se ha realizado una primera aproximación al estudio sobre la evaluación de las capacidades de lectura e interpretación de gráficos estadísticos en futuros profesores de Italia y Portugal. Los resultados arrojan ciertas carencias en la formación estadística que impide la completa interpretación y lectura crítica de los gráficos de los medios de comunicación. Sobre todo, aparece cierto déficit en la detección de sesgos o errores y en la capacidad de corregir o aportar otro tipo de gráficos para mejorar la lectura de la información. Es necesario, por tanto, realizar acciones formativas específicas sobre el alumnado de Educación y profesorado en formación para evitar este tipo de carencias y alcanzar una adecuada cultura estadística entre los futuros formadores.

En un trabajo posterior se realizará el análisis de otros tipos de gráficos estadísticos para comprobar si el comportamiento es similar al de los diagramas de sectores. Una línea de trabajo futuro es la de realizar estudios de similares características en distintos países de diferentes entornos y tipologías.

Referencias

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. & Contreras, J. M. (2011). Las tablas y gráficos estadísticos como objetos culturales. *Números*, *76*, 55-67.

Arteaga, P., Batanero, C., Contreras, J. M. & Cañadas, G. (2016). Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. *RELIME*, *19*(1), 15-40.

Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. En *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística*. Buenos Aires. doi: 10.1017/CBO9781107415324.004

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M. & Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. Números. *Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *83*, 7-18.

Contreras, J. M. & Molina-Portillo, E. (2019). Elementos clave de la cultura estadística en el análisis de la información basada en datos. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. del M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-12). Granada: Universidad de Granada.

Espinel, C., González, T., Bruno, A. & Pinto J. (2009)., Las gráficas estadísticas. En L. Serrano (Ed.), *Tendencias actuales de la investigación en Educación Estadística*, (pp. 133-156). Melilla. Facultad de Humanidades y Educación.

Friel, S., Curcio, F. & Bright, G. (2001). Making Sense of Graphs: Critical Factors Influencing Comprehension and Instructional Implications. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 124-158.

Gal, I., & Murray, S. T. (2011). Responding to diversity in users' statistical literacy and information needs: Institutional and educational implications. *Statistical Journal of the International Association for Official Statistics*, *27*(3-4), 185-195.

Gea, M.M., Arteaga, P. & Cañadas, G.R. (2017). Interpretación de gráficos estadísticos por futuros profesores de Educación Secundaria. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, *12*, 19-37.

Molina-Portillo, E., Contreras, J. M., Godino, J. D. & Díaz-Levicoy, D. (2017). Interpretación crítica de gráficos estadísticos incorrectos en la sociedad de la comunicación: un desafío para futuros maestros. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, (Extra), 4787-4794.

Molina-Portillo, E., Martínez-Ortiz, F., Garzón-Guerrero, J.A. & Arteaga-Cezón, P. (2020). Estudio de errores y dificultades vinculados a la elaboración e interpretación de diagramas de sectores. En T. Sola, J.A. López-Núñez, A.J. Moreno, J.M. Sola, S. Pozo (Eds.), *Investigación Educativa e Inclusión. Retos actuales en la sociedad del siglo XXI* (pp. 831-843). Madrid: Dykinson.

Monteiro, C. & Ainley, J. (2007). Investigating the interpretation of media graphs among student teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2(3), 188-207.

Pérez-Echeverría, M., Postigo, Y. & Marín, C. (2018). *Understanding of graphs in social science undergraduate students: selection and interpretation of graphs*. Irish Educational Studies, 1-23.

Sharma, S. (2013). Assessıng students' understandıng of tables and graphs: implıcatıons for teachıng and research. *International Journal of Educational Research and Technology*, 51-70.

Watson, J., & Fitzallen, N. (2010). *The Development of Graph Understanding in the Mathematics Curriculum. Report for the NSW Department of Education and Training*. Sydney: Department of Education and Training.

Conhecimentos para o ensino da Estatística explicitados em pesquisas desenvolvidas no OBEDUC

Angélica da Fontoura Garcia Silva, Ruy César Pietropaolo, Maria Elisabette Brisola Brito Prado

Universidade Anhanguera de São Paulo

Resumo

Destacam-se aqui as pesquisas elaboradas e orientadas pelo grupo de pesquisa em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo (UNIAN-SP), ligado ao projeto *Investigações sobre o Processo de Ensino e de Aprendizagem de Conceitos concernentes à Probabilidade e Estatística*, coordenado pelo Professor Doutor Ruy César Pietropaolo. Esse projeto, destinado à pesquisa e à formação de professores, foi aprovado e desenvolvido no âmbito do Programa *Observatório da Educação*, promovido nacionalmente pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). As atividades de formação foram realizadas com o objetivo de ampliar os conhecimentos profissionais de um grupo de professores em relação à leitura e construção de gráficos estatísticos, às Medidas de Tendência Central (MTC) e às noções envolvidas na leitura da curva normal.

Palavras-chave: Letramento Estatístico, Medidas de Tendência Central, Curva Normal, Formação Continuada de Professores, Conhecimento Matemático para o Ensino.

1. Introdução

A finalidade dos estudos aqui expostos — Sera (2016), Alves (2016) e Macedo (2016) — foi investigar a ampliação da base de conhecimentos de um grupo de professores de Matemática da Educação Básica para ensinar noções de Estatística, mediante uma formação continuada, cujos pressupostos estavam ancorados em promover reflexões compartilhadas sobre o Letramento Estatístico que envolviam questões relacionadas às dificuldades de ensinar noções relativas ao tema. Estudos nacionais e internacionais, além de resultados de exames de desempenho de estudantes, apontam limitações enfrentadas por alunos (Batanero, 2013) e professores (Pietropaolo, Garcia Silva & Amorim, 2019) da Educação Básica diante do conteúdo. Como tais dificuldades podem comprometer o desenvolvimento do Letramento Estatístico do cidadão, sem que este possa compreender adequadamente as informações a que é submetido e, consequentemente, posicionar-se corretamente para a tomada de decisão, percebe-se a importância em abordar tal temática nesta investigação.

Participaram dos três estudos 15 professores de Matemática atuantes no Ensino Fundamental II e no Ensino Médio da rede pública da cidade de São Paulo. Além disso, nessas três dissertações aqui analisadas, a pesquisa de natureza qualitativa foi orientada metodologicamente pelo *Design Experiments* (Cobb, Confrey, diSessa, Leher & Schauble, 2003) e foi realizada em três etapas que contemplaram, respectivamente, os temas: leitura e construção de gráficos estatísticos, Medidas de Tendência Central (MTC) e noções envolvidas na leitura da curva normal. Em cada etapa, a fase prospectiva do *Design* contemplou: a revisão de literatura e a escolha do aporte teórico para a preparação das atividades a serem desenvolvidas; uma atividade diagnóstica sobre os conhecimentos dos participantes em relação ao tema; e a aplicação de um questionário para ter uma perspectiva da experiência que eles vivenciaram diante do ensino do tema em questão. Na segunda fase, denominada de processo formativo, o planejamento da formação sobre o tema levou em conta as respostas aos instrumentos de coleta de dados aplicados inicialmente e sofreu alterações a fim de se adequar às necessidades apresentadas pelos professores ao longo da formação e, consequentemente, favorecer a discussão de novos conhecimentos. O desenvolvimento de todo o processo foi baseado nas demandas dos professores e nos resultados de pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem em Estatística.

Quanto às fundamentações teóricas relativas aos conhecimentos profissionais docentes que consubstanciaram a análise dos dados obtidos, foram utilizadas as categorias propostas por Ball, Thames e Phelps (2008). No tocante à formação de professores reflexivos, recorreu-se a estudos de Schön (1992) e Zeichner (1993, 2008). Em cada etapa, foram considerados aportes teóricos para o ensino de Estatística relacionados ao tema central da intervenção, ou seja, leitura e construção de gráficos estatísticos, Medidas de Tendência Central (MTC) e noções envolvidas na leitura da curva normal.

Cada um dos temas foi desenvolvido com a participação dos pesquisadores do grupo e deu origem a uma dissertação de mestrado, que passaremos a descrever a seguir. Destacamos os estudos de Sera (2016), Alves (2016) e Macedo (2016), os quais geraram artigos publicados em revistas e em atas de eventos nacionais e internacionais: Sera e Pietropaolo (2016); Alves e Pietropaolo (2018); Pietropaolo, Garcia Silva, Prado e Galvão (2017); Alves, Garcia Silva e Pietropaolo (2017); Alves, Garcia Silva, Pietropaolo e Amorim (2019); Alves, Garcia Silva, Amorim e Pietropaolo (2017) e Garcia Silva, Alves, Pietropaolo e Amorim (2020).

2. Descrição dos resultados

Sera (2016) investiga a ampliação da base de conhecimentos necessários ao ensino de um grupo de professores e os aspectos relativos à formação reflexiva dos participantes em um ambiente de estudo de inovações curriculares. Para ensinar leitura e construção de gráficos estatísticos, o pesquisador considera os pressupostos das reflexões compartilhadas sobre o Letramento Estatístico e dificuldades de ensinar noções relativas ao tema contidas nos trabalhos de Gal (2005) e os significados que Freire (1994) atribui ao construto *Leitura*.

Na análise inicial dos conhecimentos dos participantes concernentes à leitura e construção de gráficos estatísticos, observam-se limitações. Citamos como exemplo o desconhecimento de representações gráficas presentes nos documentos de apoio ao currículo ou gráficos presentes no cotidiano dos alunos. Verifica-se também a falta de domínio em manipular um *software* como auxílio para o ensino de gráficos estatísticos; além disso, nota-se que a maioria dos participantes, ao lecionar sobre o tema em sala de aula, não considerava outras estratégias para o ensino que não fosse composta por aulas expositivas.

No início da formação, alguns professores do grupo demonstraram que não sabiam determinar tipos de gráficos adequados para representar variáveis específicas, tampouco se preocupavam com os elementos que compõem um gráfico estatístico, tais como título, rótulo dos eixos vertical e horizontal ou linhas de grade. Na leitura dos gráficos, os dados mostraram limitações de conhecimento quando o autor identificou incorreções ao extrair informações básicas da representação gráfica. Foi possível observar a preocupação de alguns professores em levar para a sala de aula gráficos retirados dos meios de comunicação ou de avaliações nacionais. Contudo, de maneira geral, os participantes do estudo não apresentaram uma base sólida de conhecimentos estatísticos, apesar de considerarem fundamental o indivíduo ser estatisticamente letrado para interpretar gráficos.

Durante o processo formativo, foram discutidas situações de aprendizagem que podem favorecer o desenvolvimento do Letramento Estatístico no tocante à leitura e à construção de gráficos e foi promovida a familiarização dos participantes com o *software Excel*. A sequência didática proposta proporcionou aos participantes, organizados em grupos, a reflexão a respeito de uma leitura mais aprofundada dos gráficos. A socialização das discussões favoreceu a prática reflexiva dos participantes, os quais passaram a questionar determinadas construções, identificaram os tipos de gráficos que se adequavam mais aos dados e apresentaram justificativas sobre a inadequação dos demais. A vivência da construção de gráficos estatísticos também favoreceu o reconhecimento da relevância de procurar ler cuidadosamente as informações dispostas em uma tabela; e a promoção da reflexão proporcionou a ampliação das próprias estratégias para o ensino de leitura de gráficos estatísticos, segundo a concepção de leitura de Freire (1994). Ao final da formação, ficou clara a evolução de cada participante — embora uns tenham ampliado mais a base de conhecimentos para o ensino que outros — em relação ao tema do estudo.

A pesquisa de Alves (2016) norteia-se pelo mesmo aporte teórico para a formação de professores. Busca investigar a ampliação dos conhecimentos dos docentes para o ensino de Medidas de Tendência Central (MTC), com o apoio do modelo de Letramento Estatístico proposto por Gal (2004) e dos estudos de Batanero (2000) e Batanero, Díaz, Contreras e Roa (2013) sobre o sentido, o significado e a compreensão de MTC.

A análise dos dados coletados mostra que, no início do processo formativo, a maioria dos participantes dominava os procedimentos de cálculo das medidas, no entanto não apresentava argumentações que levassem em conta a relação entre essas medidas para a tomada de decisão solicitada numa situação-problema. Mesmo aqueles que tentaram relacionar os valores da média, da moda e da mediana entre si responderam à situação apoiando-se na análise dos valores das medidas de forma isolada.

O plano inicial para o processo formativo levou em conta esses resultados para a proposição das atividades, as quais aprofundaram os conhecimentos acerca das características e propriedades das MTC. Nessa fase, os formadores reforçaram, por meio das discussões e das reflexões, a perspectiva da prática docente de ensino e as dificuldades que os alunos poderiam vivenciar durante o aprendizado de média, mediana e moda.

De modo geral, verifica-se a ampliação dos conhecimentos profissionais docentes acerca dos conceitos e significados das MTC, possibilitando que eles desenvolvessem análises mais estruturadas de situações que tivessem como informação a média, a mediana e a moda dos elementos estudados. Dentre os aspectos que podem ser destacados nessa trajetória, salientamos: a superação, por parte dos professores, da ideia de que a média geralmente é a mais adequada para indicar a tendência central de um conjunto de dados;

a necessidade de o significado da moda, ao longo do curso, ter sido retomado, pois havia professores que a consideravam como uma medida que representava a maioria dos elementos do conjunto estudado; o desenvolvimento, pelos participantes, do conhecimento de quais são as dificuldades mais comuns entre os estudantes em relação à temática *MTC*. Conclui-se que, com esse tipo de trabalho formativo, os docentes dessa área poderão aprimorar o planejamento de suas práticas de ensino antevendo as limitações de seus alunos.

Macedo (2016) considera, em sua investigação, os conhecimentos dos professores para o ensino de noções envolvidas na leitura da curva normal para alunos do Ensino Médio. Leva em conta as reflexões compartilhadas e as vivências sobre inovações apresentadas nos mais recentes currículos acerca da Estatística e da Probabilidade, com os mesmos pressupostos teóricos dos trabalhos anteriores. Para as discussões referentes ao Letramento Estatístico, opta pelas ideias de Gal (2004) e Batanero e Godino (2005), que discutem investigações sobre a Educação Estatística e justificam a inserção desse tema na escola básica desde os anos iniciais.

As respostas dos professores ao diagnóstico inicial revelam concepções inconsistentes sobre significados de noções estatísticas, nomeadamente sobre o desvio padrão. Observa-se que o grupo de professores, no geral, não priorizava esse tema em suas aulas. Os participantes discutiram situações de aprendizagem com o objetivo de favorecer a compreensão de alunos do Ensino Médio sobre os significados de média, mediana e desvio padrão e de realizar a leitura do gráfico de uma curva normal, ainda que de forma incipiente, favorecendo o desenvolvimento do Letramento Estatístico.

As discussões sobre os significados de noções concernentes ao tema favoreceram uma tomada de posição favorável dos docentes para introduzi-las em suas aulas, em especial, a análise da curva normal em contextos significativos para estudantes.

O autor conclui que as reflexões realizadas durante o processo formativo ampliaram a base de conhecimentos dos professores para o ensino da Estatística. Os resultados desse estudo também indicam a necessidade de haver, em processos formativos, uma articulação entre diferentes abordagens, estratégias, contextos e materiais para os processos de ensino e aprendizagem de noções relativas ao tema estudado.

3. Considerações finais

Consideramos que outras pesquisas envolvendo os aspectos já contemplados e outros tipos de gráficos estatísticos (*boxplot*, histograma, estrutura de dispersão bivariada) deveriam ser desenvolvidas. Também pensamos ser relevante o estudo do *outlier* e de sua influência na interpretação das informações e no cálculo dessas medidas estatísticas. Entretanto, para isso, esse grupo de professores deveria avançar mais nos conhecimentos estatísticos.

Como resultados alcançados, concluímos que a compreensão das propriedades e dos significados das MTC possibilitou a ampliação da base de conhecimentos dos professores. Eles conseguiram inter-relacionar tais medidas para a tomada de decisão e reconhecer que, em certos momentos, teriam de lançar mão de outras ferramentas, como a análise da dispersão dos dados.

Tem-se a convicção de que os resultados obtidos, tanto para os professores participantes dessas investigações quanto para o desenvolvimento da pesquisa para a Educação Estatística, foram possíveis de alcançar devido à maneira como o curso de formação continuada foi desenvolvido, à motivação para a discussão e reflexão e à disposição para expor concepções e questionamentos. Acreditamos que as características das pesquisas podem ser utilizadas em cursos de formação inicial e continuada, possibilitando a outros docentes ampliarem suas visões do ensino dessa temática.

Referências

Alves, T. A. (2016). *Conhecimentos de professores de matemática da educação básica sobre o ensino de medidas de tendência central* (Dissertação de Mestrado). Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo.

Alves, T. A., & Garcia Silva, A. F. (2017). Conhecimentos para o ensino de média moda e mediana evidenciados por participantes de um curso de formação continuada. In Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (Ed.), *VIII Congresso Iberoamericano de Educación Matemática: Libro de Actas* (pp. 158-166), Madrid.

Alves, T. A. S., Garcia Silva, A. F., Pietropaolo, R. C., & Amorim, M. E. (2019). Medidas de tendência central: conhecimentos profissionais docentes. In SBEM (Ed.), *Anais do XIII ENEM Encontro Nacional De Educação Matemática* (pp. 1-14), Cuiabá.

Alves, T., & Pietropaolo, R. C. (2018). Conhecimentos de professores de Matemática sobre as medidas de tendência central para o ensino na Educação Básica. *Jornal Internacional De Estudos Em Educação Matemática, 11*, 291-295.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching. What makes it special? *J Teacher Educ*, 59(5), 389-407.

Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición central. *Revista de Didáctica de las Matemáticas UNO, 25*, 41-58.

Batanero, C. (2013). Sentido estadístico. Componentes y desarrollo. In J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea & P. Artega (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales de Didáactica de la Estadística, la Probabilidade y la Combinatoria* (pp. 55-61), Granada: Universidad de Granada.

Batanero, C., Díaz, C., Contreras, J. M., & Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Revista de Didáctica de las Matemáticas – NÚMEROS, 83*, 7-18.

Batanero, C. G., & Godino, J. D. (2005). Perspectivas de la educación estadística como área de investigación. In R. Luengo, *Líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 203-226). Badajoz: Universidad de Extremadura.

Cobb, P. C., Confrey, J., diSessa, A., Leher, R., & Schauble, L. (2003). Design Experiments in Educational Research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Freire, P. (1994) *A importância do ato de ler*: em três artigos que se completam. 29ª ed. São Paulo: Cortez, (Coleção questões da nossa época).

Gal, I. (2005) Statistical Literacy: Meanings, Components, Responsibilities. In: Bemziv, D., Garfield, J. *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht p. 4778.

Garcia Silva, A. F., Alves, T. A. S., Pietropaolo, R. C. & Amorim, M. E. (2020). Propriedades da média: um estudo sobre respostas dadas por professores para casos de ensino. *Educação Matemática em Revista, 1*.

Macedo, R. C. (2016). *Conhecimentos de professores de matemática sobre o processo de ensino e de aprendizagem de noções estatísticas – curva normal* (Dissertação de Mestrado), Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo.

Pietropaolo, R. C., Garcia Silva, A. F., & Amorim, M. E. (2019). Conhecimentos de professores de Matemática para o ensino de noções relativas à Estatística na Educação Básica. *REVEMAT, 14*, 1-20.

Pietropaolo, R., Silva, A., Prado, M. E., & Galvão, M. (2017). Letramento estatístico na formação continuada de professores dos anos iniciais com foco nas representações gráficas. *Revista de Ensino, Educação e Ciências Humanas, 18*, 341-346.

Schön, D. A. Formar professores como profissionais reflexivos. In: NÓVOA, António (Coord.). *Os professores e sua formação*. Lisboa: Dom Quixote, 1992.

Sera, E. K. (2016). *Conhecimento de professores para o ensino da leitura e construção de gráficos estatísticos na Educação Básica* (Dissertação de Mestrado). Universidade Anhanguera de São Paulo, São Paulo.

Sera, E. K., & Pietropaolo, R. C. (2016). Leitura de gráficos estatísticos na formação de professores de Matemática da Educação Básica. In E. Mariscal (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 982-989). Ciudad del México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Zeichner, K. M. (2003). Formando professores reflexivos para a educação centrada no aluno: possibilidade e contradições. In: Barbosa, R. L. L. (Org.) *Formação de educadores: desafios e perspectivas* (35-55). São Paulo: UNESP.

Inteligencias Múltiples para el desarrollo de la Competencia Estadística y la mejora de la Actitud hacia la Estadística

Jon Anasagasti Aguirre[1] y Ainhoa Berciano Alcaraz[2]
[1]Universidad del País Vasco, [2]Euskal Herriko Unibertsitatea

Resumen

La teoría de las Inteligencias Múltiples definida por Gardner aboga por personalizar los procesos de enseñanza-aprendizaje aprovechando las características propias de cada estudiante. En este trabajo se muestra la manera en que es posible incorporar dicha teoría en un proyecto de estadística con alumnado universitario de tercer curso del Grado de Educación Primaria, y los resultados derivados de dicha propuesta. Al realizar el proyecto se pretende que todo el alumnado implemente un ciclo de investigación completo, utilizando para ello técnicas estadísticas básicas, con la intención de desarrollar su Competencia Estadística y su Actitud hacia ella. Entre los resultados obtenidos cabe destacar aquellos que están relacionados con la Actitud, puesto que en su conjunto mejoran de manera significativa.

Palabras clave: Inteligencias múltiples, Futuros docentes, Educación Estadística, Competencia Estadística, Actitud hacia la Estadística.

1. Introducción

La Educación Estadística ha ganado peso en los últimos años dentro de los currículos matemáticos debido a la necesidad de que toda persona desarrolle su sentido estadístico para desenvolverse en una sociedad en la que, a diario, encontramos una gran cantidad de información y de datos. El concepto de sentido estadístico acuñado por Batanero (2013) resulta de la unión de tres componentes: comprender las ideas estadísticas fundamentales, tener cierta competencia de análisis de datos y el razonamiento estadístico. Su desarrollo debe darse a través de los distintos niveles educativos y en consecuencia, creemos importante que los estudiantes del Grado de Educación Primaria (EP), futuros maestros de escuela, estén preparados y motivados para su enseñanza. En este sentido, existen propuestas para trabajar esta materia mediante la metodología del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) con futuros docentes. Pero ¿qué se puede decir acerca de otras aportaciones de metodologías activas como la teoría de las Inteligencias Múltiples (IM)?

Prieto, Navarro, Villa, Ferrándiz y Ballester (2002) argumentan que parece bastante evidente que cada persona elabora y relaciona los datos percibidos en función de sus propias características personales y contextuales. Estos autores apoyan mediante sus trabajos empíricos la existencia de distintas maneras de aprender ligadas a cada inteligencia; y en consecuencia, ponen de manifiesto la idea de que un docente debe utilizar los estilos de aprendizaje que un determinado estudiante manifiesta para implicarle en las tareas escolares.

Estudios como el de Díaz-Posada, Varela-Londoño y Rodríguez-Burgos (2017) muestran los avances en términos de modelos de enseñanza basados en la teoría; no obstante, no encontramos muchos estudios que relacionen la teoría de las IM con el desarrollo del sentido estadístico.

Con la idea de desarrollar el sentido estadístico de futuros docentes de Educación Primaria, junto con otras competencias necesarias para dicha profesión como son conocer el currículo escolar, utilizar de manera adecuada los materiales didácticos y medios tecnológicos, o reconocer el papel de las matemáticas, hemos desarrollado un módulo de aprendizaje que además de utilizar metodologías activas como el ABP también incorpora la teoría de las IM (Anasagasti, 2019). La investigación que se muestra a continuación es parte de un estudio más amplio en el que se implementa dicho módulo, poniendo en práctica un ciclo de investigación completo y utilizando técnicas estadísticas básicas, y el cual busca mejorar la competencia y la actitud hacia la estadística de futuros docentes de EP.

En este caso, nos centramos en exponer de qué manera se ha incorporado la teoría de las IM en el módulo y estudiar qué relación ha tenido tanto con la Competencia Estadística como con la Actitud hacia la Estadística, observando si existen diferencias en algún tipo de IM, con la intención de poder desarrollar en un futuro secuencias didácticas apropiadas para cada estudiante. Por lo tanto, podemos resumir nuestro problema de investigación como: ¿Cuál es la aportación de la teoría de las Inteligencias Múltiples a la mejora de la Competencia estadística y la Actitud hacia la estadística?

A continuación, exponemos una breve exposición de los fundamentos teóricos pertinentes, continuamos explicando la metodología de investigación que se ha llevado a cabo y finalmente presentamos los resultados obtenidos haciendo un trabajo de reflexión para obtener las conclusiones finales del estudio.

2. Marco Teórico

La teoría de las Inteligencias Múltiples, en contra de la teoría psicométrica cuya piedra angular es la inteligencia general o “g”, pretende articular diversas capacidades o inteligencias que, por medio de estudios del desarrollo cognitivo y la neuropsicología, parecen formar clases naturales (Gardner, 2012). En esta teoría, las inteligencias se sacan de contexto con el único propósito de examinar sus principales características y aprender a utilizarlas de forma eficaz (Armstrong, 2006). A pesar de que las capacidades o inteligencias definidas en esta teoría han ido cambiando, fundamentalmente se tienen en cuenta las siguientes ocho inteligencias: Lingüística-Verbal, Lógico-Matemática, Visual-Espacial, Cinestésica-Corporal, Musical, Interpersonal, Intrapersonal y Naturalista.

Los defensores de esta teoría critican el sistema educativo, argumentando que concentrarse de forma exclusiva en las capacidades lingüísticas y lógicas durante la escolaridad formal puede negar la atención a las habilidades propias de los estudiantes. En este sentido, una de las tres maneras positivas en las que Gardner (2012) propone aplicar la teoría de las IM en las escuelas es la personalización de la educación, por ejemplo, al formar grupos o al buscar apoyo cognitivo vinculado al tipo de inteligencia.

Además, autores como Ferrándiz, Bermejo, Sainz, Ferrando y Prieto (2008) indican que mediante la teoría de las IM “los educadores también pueden hallar formas de aprovechar los recursos de la escuela, la casa y la comunidad con el fin de introducir a los alumnos en ámbitos poco conocidos y estimulantes del saber" (p. 221).

Sobre la competencia estadística, señalar primeramente que entendemos este concepto como la capacidad que el futuro docente tiene para desarrollar el razonamiento estadístico de su alumnado (Anasagasti, 2019). Cuando hablamos de competencia estadística debemos tener muy en cuenta que ésta viene previamente definida por el concepto de sentido estadístico acuñado por Batanero (2013) y que resulta de la unión de tres componentes anteriormente descritas. No obstante, en el caso de futuros docentes, la competencia estadística también se ve definida por otras sub-competencias que implican conocer el currículo escolar, utilizar de manera adecuada los materiales didácticos y medios tecnológicos, o reconocer el papel de las matemáticas (Anasagasti, 2019).

En cuanto a Actitud hacia la estadística podemos encontrar en la literatura diferentes constructos entre los que destacamos el propuesto por Schau, Stevens, Dauphinee y Del Vecchio (1995) el cual es de carácter multidimensional y se compone de cuatro componentes o sub-escalas diferenciadas: Afectivo, Cognitivo, Valor y Dificultad. De la aplicación de este cuestionario a 367 futuros docentes de Primaria, Estrada, Batanero, Fortuny y Díaz (2005) concluyen que la Actitud hacia la estadística está muy ligada a la percepción de su propia capacidad de aprendizaje y al valor atribuido a la materia. Los autores concluyen que las experiencias formativas positivas fomentan la capacidad de los futuros docentes para el aprendizaje estadístico continuo, además de ayudarles a reflexionar sobre la naturaleza de las estadísticas y les ayuden a valorar el conocimiento estadístico y su alfabetización.

3. Metodología

Tal como se ha indicado, esta investigación forma parte de un estudio más amplio y de tipo mixto en el que se han comparado resultados de un grupo que trabaja los contenidos estadísticos mediante un módulo de enseñanza-aprendizaje que incluye los principios metodológicos del Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) y la teoría de las IM (ver Anasagasti y Berciano, 2016), y un grupo de control que lo hace mediante metodología más tradicional basada en explicaciones teóricas y ejercicios. Para este estudio concreto, contamos con los datos cuantitativos respecto a las variables de *Competencia Estadística* y *Actitud hacia la estadística* del grupo de 69 estudiantes que participa en el módulo, en función del tipo de inteligencia destacado en cada uno de ellos.

Antes de realizar el módulo se identifican los tipos de IM por medio de un cuestionario que los propios estudiantes contestan, y el cual está basado en el inventario de IM para personas adultas propuesto por Armstrong (2006). Este cuestionario devuelve, por tanto, una percepción que de sus propias "inteligencias" tienen las personas de la muestra.

En cuanto a la manera de incorporar la teoría de las IM en el módulo debemos señalar dos ejes de actuación que parten del hecho de agrupar a los estudiantes de forma homogénea para trabajar en el módulo (una vez analizados los resultados del inventario de IM). Por un lado, como las personas con el mismo tipo de IM destacado deben trabajar en el mismo grupo de manera cooperativa, el tema o contexto elegido para realizar el proyecto de cada grupo puede estar orientado hacia intereses comunes, y lograr de esta manera una motivación e implicación mayor.

Por otro lado, los ejercicios y lecturas propuestas por el docente están personalizados según el tipo de IM destacado en cada grupo, ofreciendo de esta manera apoyos cognitivos para cada estudiante. Los ejercicios persiguen unos objetivos concretos por lo que únicamente se diferencian en el contexto construido para cada uno. En cuanto a las lecturas, los artículos seleccionados para cada grupo son un buen ejemplo de cómo se puede utilizar la estadística en ámbitos relacionados con el campo de interés de cada persona, mostrando ejemplos concretos de su aplicación.

Como instrumentos de análisis de las variables mencionadas, antes y después de realizar el módulo, se les pasa el *Test de Competencia Estadística* (TCE) (Anasagasti, 2019) que mide la mejora en cuanto a competencia estadística, y el *Survey of Attitudes Toward Statistics* (SATS) (Schau et al., 1995) para medir la evolución en cuanto a Actitud hacia la estadística.

4. Resultados

A continuación, se presentan los resultados obtenidos antes y después de implementar el módulo, tanto en Competencia Estadística (TCE) como en Actitud hacia la estadística (SATS) en función del tipo de inteligencia destacado en cada estudiante. Se debe señalar que los grupos difieren considerablemente en tamaño, dado que la muestra no es muy grande (69); hay grupos como el Musical o el Inter-personal que están formados por 22 y 14 personas respectivamente, pero hay otros como el Naturalista que solamente lo componen 2 personas. En el caso de la inteligencia Lingüística-Verbal no encontramos a ninguna persona que destaque en ella y en consecuencia ni siquiera aparece en los resultados.

En cuanto a Competencia Estadística, se puede observar (Figura 1) que las personas que mayor puntuación logran, tanto en el pre-test como en el post-test, son las destacadas en Inteligencia Naturalista. Este dato hay que tomarlo con cautela puesto que, como ya se ha comentado, solamente 2 personas componen este grupo. Indicar también, que las personas destacadas en inteligencia Lógico-Matemática son las que obtienen en el post-test la puntuación total más baja debido a las bajas puntuaciones de las sub-competencias de Conocimiento del Currículum y de la Utilidad y a pesar de lograr las mejores puntuaciones en la sub-competencia relativa a Conocimiento Estadístico.

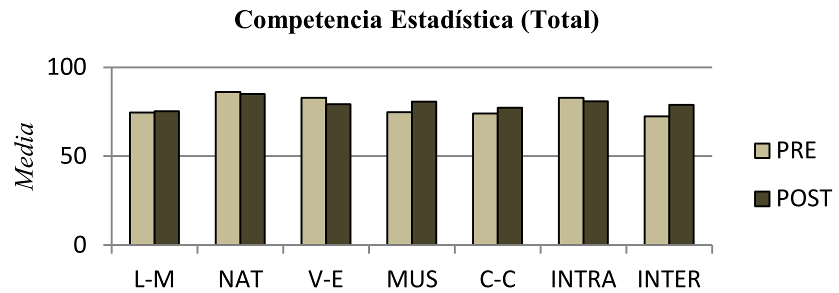


Figura 1. Puntuación media total TCE según tipo de IM (pre y post).
Fuente: hecho por los autores

En el pre-test se obtiene que sí existen diferencias entre los diferentes grupos en la puntuación total y la sub-competencia de utilidad. Los valores más distantes resultan ser para la puntuación total el grupo de inteligencia Interpersonal (36.14) y el Naturalista

(43); y en la sub-competencia de Utilidad las más distantes son el grupo de inteligencia Lógico-Matemática (11.25) y nuevamente el Naturalista (15).

En el post-test, tras la implementación del módulo diseñado para adaptarse a las características de cada persona, las puntuaciones no son estadísticamente diferentes entre grupos. Hay que mencionar que mientras unos grupos evolucionan favorablemente otros lo hacen en sentido negativo, pero en todo caso las diferencias existentes entre los diferentes grupos no son estadísticamente significativas. Igualmente, a pesar de que las evoluciones hayan sido en sentidos opuestos en algunos casos, las diferencias entre los resultados de evolución no resultan estadísticamente significativas en ningún caso.

En el caso de la Actitud hacia la estadística (Figura 2) los grupos que en general destacan por sus puntuaciones más altas tanto en el pre-test como en el post-test son los de inteligencia Lógico-Matemática y Naturalista, mientras que grupos como el Interpersonal o el Intrapersonal registran puntuaciones que indican una actitud menos positiva. Destacar también que el grupo Visual-Espacial obtiene buenos resultados en el pre-test pero es el único que empeora en el post-test, convirtiéndose en uno de los grupos con puntuación más baja.

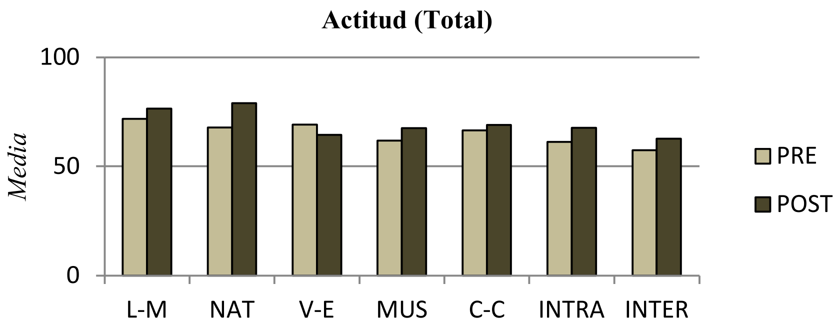


Figura 2. Puntuación media total SATS según tipo de IM (pre y post)

Fuente: hecho por los autores

En todo caso, se obtiene que la diferencia en positivo entre pre-test y post-test sí es estadísticamente significativa para todo el conjunto. Al analizar las diferencias existentes entre grupos, se obtiene que dichas diferencias son estadísticamente significativas tanto en el pre-test como en el post-test pero en ningún caso las diferencias registradas en su evolución.

5. Conclusiones

A raíz de los resultados presentados creemos que la incorporación de la teoría de las Inteligencias Múltiples sí ha ayudado a implicar a los estudiantes en la tarea propuesta, puesto que, al margen de las diferencias existentes entre grupos, prácticamente en todos ellos se logra mejorar la Actitud hacia la estadística.

En cuanto a la mejora de la Competencia Estadística se observan ciertas desigualdades puesto que no en todos los casos se favorece dicho proceso; creemos que se debe incidir en la labor de conexión de los contenidos estadísticos con las actividades propuestas. Además, parece claro que ciertos aspectos al margen del propio conocimiento estadístico deben seguir reforzándose. Comprender el lugar cada vez más importante que la estadística ocupa en los currículos, saber llevar al aula materiales didácticos y medios tecnológicos adecuados, y reconocer el papel que asume en nuestra sociedad la estadística, resulta imprescindible para el futuro profesorado de Educación Primaria dentro del contexto escolar actual (Anasagasti, 2019).

Por todas estas razones creemos oportuno seguir trabajando en esta línea, puesto que tal como indican Díaz-Posada, Varela-Londoño y Rodríguez-Burgos (2017), a pesar de que el sustento teórico señala una gran aplicabilidad de la teoría de las IM en los contextos pedagógicos, no existe una amplia literatura acerca del tema. Sobre este estudio, hay aspectos que necesitan ser desarrollados, como la personalización de las tareas a realizar en el módulo, especialmente en algunos tipos de inteligencia, considerando la creación de modelos o propuestas ejemplo.

Además, parece interesante continuar profundizando en las diferencias existentes entre diferentes tipos de IM, sus posibles causas y consecuencias. De esta forma creemos que se puede ayudar a orientar el trabajo del proyecto hacia los intereses de todas las personas, y lograr así experiencias formativas positivas que fomenten el aprendizaje estadístico continuo.

Referencias

Anasagasti, J. (2019). Desarrollo de la competencia estadística del futuro docente de primaria a través del aprendizaje basado en proyectos (Tesis Doctoral). Universidad del País Vasco/Euskal Herriko Unibertsitatea, Bilbao, España.

Anasagasti, J., & Berciano, A. (2016). El aprendizaje de la estadística a través de PBL con futuros profesores de primaria. *Contextos Educativos, 1* (extraordinario), 31-43.

Armstrong, T. (2006). *Inteligencias múltiples en el aula. Guía práctica para educadores*. Barcelona, España: Paidós Educador.

Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea, & P. Arteaga (Eds.). Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria (pp. 55- 61). Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Díaz-Posada, L.E., Varela-Londoño, S.P., & Rodríguez-Burgos, L.P. (2017). Inteligencias múltiples e implementación del currículo: avances, tendencias y oportunidades. *Revista de Psicodidáctica, 22*(1), 69-83.

Estrada, A., Batanero, C., Fortuny, J. M., & Díaz, C. (2005). A structural study of future teachers' attitudes towards statistics. *Proceedings of CERME IV, European Research in Mathematics Education*. San Feliu de Guixols, Gerona: CERME.

Ferrándiz, C., Bermejo, R., Sainz, M., Ferrando, M., & Prieto, M. D. (2008). Estudio del razonamiento lógico-matemático desde el modelo de las inteligencias múltiples. *Anales De Psicología 24*(2), 213-222.

Gardner, H. (2012). *El desarrollo y la educación de la mente*. Barcelona, España: Paidós.

Prieto, M. D., Navarro, J.A., Villa, E., Ferrándiz, C., & Ballester, P. (2002). Estilos de trabajo e inteligencias múltiples. XXI. *Revista de Educación, 4*, 107-118.

Schau, C., Stevens, J., Dauphinee, T. L., & Del Vecchio, A. (1995). The development and validation of the Survey of Attitudes toward Statistics. *Educational and Psychological Measurement 55*(5), 868–875.

Preparação de livro paradidático para o ensino de estatística no ensino fundamental considerando a Base Nacional Comum Curricular no Brasil

Luzia Roseli da Silva Santos, Ailton Paulo de Oliveira Júnior, Anneliese de Oliveira Lozada

Universidade Federal do ABC

Resumo

Definiu-se como objetivo deste texto destacar elementos iniciais do processo de elaboração de um livro paradidático de apoio ao ensino de conteúdo estatístico nos primeiros anos do ensino fundamental, seguindo os princípios do Teoria Antropológica da Didática - TAD de Yves Chevallard na organização didática e praxeológica. A intenção da construção de paradidáticos não é substituir o livro didático, mas complementar a formação de alunos do ensino fundamental em relação aos conteúdos estatísticos. É necessário enfatizar a importância do aluno ter contato com a leitura e interpretação de textos em sua formação inicial, podendo ser auxiliado com o livro paradidático onde trabalhará conceitos estatísticos de forma mais agradável.

Palavras-chave: Livro paradidático, ensino de estatística, ensino fundamental, teoria antropológica do didático

1. Introdução

No que diz respeito ao ensino de estatística, a Base Curricular Comum Nacional - BNCC indica que os primeiros passos consistem em trabalhar com a coleta e organização dos dados de um inquérito de interesse aos alunos. A leitura, interpretação e construção de tabelas e gráficos têm papel fundamental, assim como a forma de produção de texto escrito para comunicação de dados (Brasil, 2018).

Portanto, tendo em vista a temática e o problema de pesquisa, o objetivo deste trabalho é destacar elementos iniciais do processo de elaboração de um livro paradidático de apoio ao ensino de conteúdo estatístico nos primeiros anos do ensino fundamental, seguindo os princípios do Teoria Antropológica da Didática - TAD de Chevallard, Bosch e Gascón (2001), na organização didática e praxeológica.

Considerando o objetivo declarado, estabelecemos a seguinte questão de pesquisa: Quais as potencialidades da elaboração de livros narrativos ficcionais no ensino de estatística fornece material didático para facilitar a compreensão dos conceitos estatísticos nas atividades sugeridas ao aluno, a fim de estimular a aprendizagem desses, trazendo elementos que sustentam o ensino desses conteúdos?

2. Marco teórico

Fonseca e Cardoso (2005) apresentam aspectos da interação discursiva nas aulas de matemática por meio de práticas de leitura de textos matemáticos, ou textos trazidos ao cenário escolar para o ensino de matemática, ou mesmo textos que requerem a mobilização de conhecimentos matemáticos para a leitura.

Dalcin (2007) abordou em sua pesquisa sobre paradidáticos em matemática, a relação entre simbologia matemática, imagens e texto escrito entre as diferentes abordagens do conteúdo matemático.

Para entender a razão da criação do termo paradidático, Borelli (1996) apresenta o sentido do termo paraliteratura, a partir da interpretação da formação da palavra como o prefixo "para" denota tanto o significado de proximidade "ao lado de" ou "ao longo de", quanto à conotação de acessório, subsidiário, e, também, o sentindo de funcionamento desordenado ou anormal".

Segundo Lima (2012), a opção de nomear esses livros de paradidáticos e não de paraliteratura, ou qualquer outro termo, foi dada pelo primeiro termo "para" sugerir uma abordagem com os livros didáticos.

Consideramos também a definição de Munakata (1997) ao afirmar que os livros paradidáticos são livros que têm características próprias. Diferente dos livros didáticos, eles não seguem uma seriação e nem uma sequência de conteúdos conforme preconiza o currículo oficial.

Buscando definir os livros paradidáticos, Yasuda e Teixeira (1995), dizem que são consideradas paradidáticas as obras produzidas para o mercado escolar sem as características funcionais e de composição do manual didático.

Em suma, o que define os livros paradidáticos é o seu uso como material que complementa (ou mesmo substitui) os livros didáticos. Tal complementação (ou substituição) passa a ser considerada como desejável, na medida em que se imagina que os livros didáticos por si sejam insuficientes ou até mesmo nocivos (Munakata, 1997)

Segundo Trevizan (2008), nos textos paradidáticos os temas costumam ser apresentados de forma menos comprometida com o isolamento e a fragmentação, possibilitando assim a relação com outras áreas de conhecimento.

Lembramos que, somente a partir de 1986, as primeiras coleções de paradidáticos de Matemática começaram a surgir, com as coleções Vivendo a Matemática, da editora Scipione, e A Descoberta da Matemática, da Ática (Dalcin, 2002).

Em relação ao ensino de Estatística, poucos trabalhos têm sido desenvolvidos, como o de Oliveira Júnior, Costa, Delalíbera, Alves, Da Silva, Oliveira e Fontana (2015) que trataram da apresentação do processo de elaboração de um livro paradidático no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID subprojeto Matemática no eixo temático: Tratamento da Informação da Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM em parceria com escolas públicas de Uberaba-MG. Com a criação do paradidático, não apenas contribuiu-se para expor uma história e a importância dos livros paradidáticos, mas também para abrir portas e estimular as produções acadêmicas, além de mostrar aos alunos, o quanto é importante a leitura para enriquecer o vocabulário dos alunos, seu conhecimento de mundo, sem sair de sua cidade, e melhorar sua escrita e oralidade.

Assim, com a criação do livro paradidático, pretendemos contribuir não apenas para expor uma história e a importância dos livros paradidáticos, mas também abrir portas e estimular a produção acadêmica, além de mostrar aos alunos a importância da leitura para enriquecer o vocabulário dos alunos, seu conhecimento do mundo, sem sair de sua cidade, e aprimorar sua escrita e oralidade.

3. Método de investigação

Para a elaboração das tarefas que serão desenvolvidas e que serão parte integrante do livro paradidático, consideraremos os aspectos relacionados aos conteúdos estatísticos para os anos iniciais do ensino fundamental sugeridos pelo BNCC (Brasil, 2018), a fim de proporcionar aos alunos a vivência dos processos apontados por Nacarato e Lopes (2005) ao considerar que se utiliza a comunicação de ideias, interações, práticas discursivas, representações matemáticas, argumentos e negociação de significados.

Além disso, com base na Teoria Antropológica da Didática - TAD, apresentaremos a elaboração de atividades para um livro paradidático em apoio ao ensino de conteúdos estatísticos dos primeiros anos do Ensino Fundamental, o qual será composto por tipos de tarefas, que identificaremos por (T), composta por uma sequência de subtarefas (t), que podem ser realizadas por meio de várias técnicas (τ) justificadas pela tecnologia (θ) que usa a teoria estatística (Θ) como objeto de estudo.

Deste modo, as tarefas propostas pretendem estar identificadas de acordo com o conteúdo e o motivo da sua proposta e se são adequadas aos alunos do ciclo a que se destinam (primeiros anos do ensino fundamental); e se o conjunto de tarefas fornece uma visão geral das situações estatísticas usadas no livro. A técnica estará disponível na íntegra, ou seja, passo a passo, ou apenas resumida, no bloco de tecnologia/teoria que será expressa ao longo do livro e com justificativas tecnológicas.

A elaboração do livro obedecerá basicamente aos seguintes passos:

(1) Apresentar pelo menos uma técnica para resolver as tarefas solicitadas;

(2) Para as técnicas descritas, estabelecer pelo menos um esboço de um discurso tecnológico;

(3) Apresentar tarefas que proponham o estudo do conteúdo estatístico de acordo com a resolução do problema do documento GAISE (Diretrizes para a avaliação e ensino em educação estatística para a educação básica) de Franklin et al. (2005);

(4) Articular diferentes tipos de tarefas em torno de conceitos estatísticos.

Segundo Lopes (2011), um dos documentos norteadores desta pesquisa, o GAISE, foi aprovado em agosto de 2005 e publicado em 2007 pela Associação Americana de Estatística (ASA). O documento indica a necessidade de que o trabalho com análise de dados na educação básica priorize a formulação de questões que possam ser tratadas mediante a coleta, organização e apresentação dos dados de maneira relevante para responder a essas questões. Ressalta também a importância de selecionar e usar de forma apropriada métodos estatísticos para analisar dados, desenvolver e avaliar inferências e predições que sejam baseadas em dados.

O documento GAISE descreve os quatro componentes da seguinte forma:

(1) Fazer perguntas: esclarece o problema e faz perguntas que podem ser respondidas com dados;

(2) Coletar dados: fazer um plano e usar para coletar os dados;

(3) Analisar: selecionar métodos gráficos ou numéricos adequados e usá-los para analisar os dados;

(4) Interpretar os resultados: interpretar a análise e informar a interpretação de acordo com a questão inicial ou provocadora do problema.

4. Resultados

A seguir, apresentamos uma das tarefas que aparecerá no livro paradidático correspondente ao proposto na Figura 1, abordando a apresentação de alguns dados que se referem aos personagens do livro e a partir delas desenvolver uma tabela estatística.

A tarefa centra-se na habilidade indicada na BNCC, que é a realização de uma investigação, a qual envolve até duas variáveis categóricas de interesse do aluno e que o universo apresentado possui até 30 elementos e, portanto, organiza os dados por meio de representações pessoais.

Verifique o número de vezes que cada um dos personagens da história foi usado durante a aula de estatística e preencha a tabela abaixo.

Personagem	Número de vezes que o personagem foi utilizado
(Estatildo)	
(Medialina)	
(Reguita)	
(Modacildo)	
(Transferildo)	
(Senhor Perninha)	
Total	

Figura 1. Tarefa proposta para a observação e organização dos dados
Fonte: Elaborado pelos autores

Voltamos também ao documento GAISE que indica a formulação de uma pergunta que esclareça o problema e formula uma pergunta que pode ser respondida com dados, ou seja: Quantas vezes os alunos usaram os personagens da história durante a aula de estatística? As respostas possíveis são: borracha (Medialina); lápis (Estatildo); apontador (Modacildo); régua (Reguita); transferidor (Transferildo); e compasso (Senhor Perninha).

Outro componente do GAISE é a coleta de dados, considerando que é a elaboração de um plano adequado e o uso do planejamento para coletar os dados. Esses componentes são tratados conforme a quantidade de vezes que cada personagem aparece em atividades em sala de aula é apresentada, configurando-se como uma coleta de dados (figura 1).

A seguir, solicita-se o preenchimento da Tabela constante na figura 1, ou seja, a proposta desta tarefa converge para o componente "Analisar" do GAISE ao propor o uso da representação tabular e numérica dos dados para a análise dos dados. Além disso, também é permitido, na sequência, trabalhar o componente "Interpretar os resultados" quando é permitido interpretar e relatar os dados de acordo com a questão inicial ou a causa do problema.

Portanto, a tarefa (T) consiste em determinar o número de vezes que cada personagem do livro paradidático é utilizado em sala de aula em uma proposta de pesquisa. A técnica (τ) que responde à tarefa T corresponde à cardinalidade ao estabelecer que o último número usado na contagem de um conjunto indica o número de elementos nele (número). A indicação do número correto de um conjunto é refletida sem contagem quando este conjunto foi contado anteriormente, ou seja, é respondido com a cardinalidade da primeira contagem. Contar quantas vezes cada personagem aparece na história, permite identificar quantos são, permitindo associá-los à frequência com que aparecem na atividade de sala de aula.

A tecnologia/teoria θ/Θ, que permite justificar e explicar as técnicas (τ) pode ser descrita considerando Duval (2003), quando afirma que o estudo das tabelas deve ser pautado no trânsito entre diferentes tipos de registros, uma vez que proporciona o visualização de um mesmo objeto matemático sob diferentes formas, o que leva os alunos a não "vasculharem a sala".

5. Conclusões

Consideramos que a elaboração do livro paradidático, não apenas contribuirá para expor uma história e a importância dos livros paradidáticos, mas também para abrir as portas e estimular as produções acadêmicas e publicações de novos títulos para o Ensino de Estatística, além de mostrar o quanto é importante a leitura para apoiar o enriquecimento do vocabulário dos alunos, seu conhecimento de mundo, sem sair de sua cidade e melhorar sua escrita e oralidade.

O trabalho realizado pretende revelar que o material paradidático, embora faça parte de um mesmo gênero de livro didático, diferencia-se em função do tipo de abordagem do conteúdo e do modo como são articulados a simbologia estatística, as imagens e o texto escrito.

Destacamos ainda a importância desse tipo de material didático (o livro paradidático) para que se desenvolva a autonomia do aluno no desenvolvimento do conhecimento estatístico, considerando ser um dos elementos fundamentais para a formação de um cidadão já que tem cada vez ganhado mais espaço nos currículos oficiais brasileiros, como a BNCC.

Busca-se elaborar um material didático que aborde diferentes conceitos estatísticos para refletirmos a importância de se trabalhar a Estatística desde os anos iniciais da escolarização.

Apesar de destacarmos a importância da utilização de livros paradidáticos para o ensino de estatística, de indicarmos que já foram publicados livros no mercado editorial brasileiro, encontramos raras publicações que realizaram trabalho científico nessa área.

Por fim, consideramos que os textos paradidáticos são materiais didáticos ricos para a formação estatística dos alunos, constituídos de informações objetivas que pretendem transmitir conhecimento e informação, abordando assuntos paralelos ligados às matérias do currículo regular, de forma a complementar os livros didáticos.

Referências

Borelli, S. H. S. (1996). *Ação, suspense, emoção:* Literatura e cultura de massa no Brasil. São Paulo: EDUC/Estação Liberdade.

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*: Educação é a base. Ministério da Educação, Brasília. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf

Chevallard, Y., Bosch, M., y Gascón, J. (2001). *Estudar Matemáticas*: O Elo Perdido entre o Ensino e a Aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas.

Dalcin, A. (2007). Um olhar sobre o paradidático de matemática. *Zetetiké*, 15(27), 25-35.

Duval, R. (2003). Registro de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: S. Diaz (Ed.), *Aprendizagem em matemática*: registro de representação semiótica (pp. 11-33). Campinas, São Paulo: Papirus.

Fonseca, M. C. y Cardoso, C. A. (2005). Educação matemática e letramento: textos para ensinar matemática e matemática para ler o texto. In: A. M. Nacarato y C. A E. Lopes *Escritas e leituras na educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Franklin, C. et al. (2005). *A curriculum framework for K-12 statistics education*. GAISE report. American Statistical Association. Disponível em: www.amstat.org/education/gaise/

Lima, E. G. (2012). *Iconografias no livro didático de história*: leituras e percepções de alunos do Ensino Fundamental. Pará de Minas, MG: Virtual Books.

Lopes, C. A. E. (2011). A Estocástica no Currículo de Matemática e a Resolução de Problemas. *Anais do 2 Seminário de Resolução de Problema* - SERP, UNESP, Rio Claro, São Paulo, Brasil.

Munakata, K. (1997). *Produzindo livros didáticos e paradidáticos*. Tese de Doutorado em História e Filosofia da Educação, Faculdade de Educação da Pontifícia Universidade de São Paulo: PUC/SP, São Paulo, Brasil.

Nacarato, A. M. y Lopes, C. A. E. (2005). *Escritas e leituras na Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Oliveira Júnior, A. P de, Costa, R., Delalíbera, B. C. da S., Alves, L. A., Da Silva, G. R., Oliveira, L. S., & Fontana, E. A. (2015). *Livro paradidático no ensino de estatística no Ensino Fundamental.* Anais da 14 Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM-IACME, Chiapas, México. Disponível em: http://ciaem-redumate.org/memorias-ciaem/xiv/pdf/Vol8Estad.pdf

Trevizan, W. (2008). A. *O uso do livro paradidático no ensino de matemática*. Disponível em: www.usp.br/siicusp/Resumos/16Siicusp/807.pdf.

Yasuda, A. M. B. G. & Teixeira, M. J. C. (1995). A circulação do paradidático no cotidiano escolar. In: H. Brandão & G. Micheletti. *Aprender a ensinar com livros didáticos e paradidáticos*. São Paulo: Cortez.

O letramento estatístico na construção de um livro paradidático para os anos finais do ensino fundamental

Celso Ribeiro Campos[1], Andréa Pavan Perin[2]
[1]PUC-SP, [2]FATEC

Resumo

A nova Base Curricular Nacional Nacional adotada no Brasil para o ensino fundamental e médio propõe a Estatística como uma unidade temática na área de Matemática, inserindo-a no currículo de todos os anos do Ensino Fundamental. Esse documento apresenta os objetos de conhecimento sobre Estatística e as habilidades essenciais para cada ano, e sugere também que o processo de ensino e de aprendizagem seja organizado de forma que os alunos elaborem atividades de pesquisa. Nosso objetivo neste estudo é identificar elementos importantes para produção de um livro paradidático de Estatística para os anos finais do EF. O livro terá como fio condutor uma história que envolve um torneio de futebol disputado entre equipes de diferentes escolas. O formato e a linguagem adotados no livro visam ajudar a desenvolver o letramento estatístico por meio de uma atividade de Modelagem Matemática.

Palavras-chave: Livro Paradidático. Literacia Estatística. Modelagem Matemática.

1. Introdução

Desde 2018 o Brasil passou a adotar a nova Base Comum Curricular Nacional (BNCC), a qual orienta as escolas da educação básica acerca dos objetivos, conteúdos e habilidades relacionados a cada área de ensino.

O documento cita explicitamente a Estatística e a Probabilidade como campos importantes para o Ensino Fundamental (EF), que abrange crianças de 6 a 14 anos:

> No Ensino Fundamental, essa área, por meio da articulação de seus diversos campos – Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade –, precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática (conceitos e propriedades), fazendo induções e conjecturas (Brasil, 2018, p. 265).

Adicionalmente, o documento destaca a importância da Modelagem Matemática para o ensino/aprendizagem da disciplina:

> Os **processos matemáticos** de resolução de problemas, de investigação, de desenvolvimento de projetos e da modelagem podem ser citados como formas privilegiadas da atividade matemática, motivo pelo qual são, ao mesmo tempo, objeto e estratégia para a aprendizagem ao longo de todo o Ensino Fundamental. Esses processos de aprendizagem são potencialmente ricos para o desenvolvimento de competências fundamentais para o letramento matemático (raciocínio, representação, comunicação e argumentação) e para o

> desenvolvimento do pensamento computacional (Brasil, 2018, p. 266, ênfase do autor).

Entre as competências específicas ligadas à Matemática e preconizadas na BNCC, destacamos:

> Desenvolver o raciocínio lógico, o espírito de investigação e a capacidade de produzir argumentos convincentes, recorrendo aos conhecimentos matemáticos para compreender e atuar no mundo.
> Compreender as relações entre conceitos e procedimentos dos diferentes campos da Matemática (Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade) e de outras áreas do conhecimento, sentindo segurança quanto à própria capacidade de construir e aplicar conhecimentos matemáticos, desenvolvendo a autoestima e a perseverança na busca de soluções.
> Fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos presentes nas práticas sociais e culturais, de modo a investigar, organizar, representar e comunicar informações relevantes, para interpretá-las e avaliá-las crítica e eticamente, produzindo argumentos convincentes.
> Enfrentar situações-problema em múltiplos contextos, incluindo-se situações imaginadas, não diretamente relacionadas com o aspecto prático-utilitário, expressar suas respostas e sintetizar conclusões, utilizando diferentes registros e linguagens (gráficos, tabelas, esquemas, além de texto escrito na língua materna e outras linguagens para descrever algoritmos, como fluxogramas, e dados).
> Interagir com seus pares de forma cooperativa, trabalhando coletivamente no planejamento e desenvolvimento de pesquisas [...] (Brasil, 2018, p. 268).

A BNCC (Brasil, 2018) propõe cinco unidades temáticas correlacionadas e articuladas entre si para orientar a formulação de habilidades a serem desenvolvidas ao longo do EF. São elas: Números; Álgebra; Geometria; Grandezas e Medidas; e Probabilidade e Estatística.

> A incerteza e o tratamento de dados são estudados na unidade temática Probabilidade e Estatística. Ela propõe a abordagem de conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações-problema da vida cotidiana, das ciências e da tecnologia. Assim, todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos (Brasil, 2018, p. 276).

No quadro 1 resumimos os objetos de conhecimento e as habilidades, ligadas à unidade temática Probabilidade e Estatística, listadas na BNCC para os anos finais do EF, já que esse é foco do nosso estudo. Nesse quadro é possível observar que a área temática de Estatística e Probabilidade enfatiza a ideia de fazer pesquisas, interpretar gráficos, reconhecer a aleatoriedade de eventos, trabalhar com medidas de posição, entre outras.

Tendo em vista os objetos de conhecimento, as habilidades e a forma preconizada para trabalhar esses objetivos com vistas ao desenvolvimento dessas habilidades, esse estudo tem como objetivo identificar elementos importantes para produção de um livro paradidático de Estatística para os anos finais do EF, envolvendo uma história relativa ao futebol, a qual trabalha com gráficos, tabelas, média aritmética, probabilidade e outros conceitos.

Quadro 1: Objetos de conhecimento e habilidades de Matemática – anos finais do EF

Ano	Objetos de conhecimento	Habilidades
8º	Princípio multiplicativo da contagem Soma das probabilidades de todos os elementos de um espaço amostral	Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1.
	Gráficos de barras, colunas, linhas ou setores e seus elementos constitutivos e adequação para determinado conjunto de dados	Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa.
	Organização dos dados de uma variável contínua em classes	Classificar as frequências de uma variável contínua de uma pesquisa em classes, de modo que resumam os dados de maneira adequada para a tomada de decisões.
	Medidas de tendência central e de dispersão	Obter os valores de medidas de tendência central de uma pesquisa com a compreensão de seus significados e relacioná-los com a dispersão de dados, a amplitude.
	Pesquisas censitária ou amostral Planejamento e execução de pesquisa amostral	Selecionar razões, de diferentes naturezas que justificam a realização de pesquisas amostrais e não censitárias, e reconhecer que a seleção da amostra pode ser feita de diferentes maneiras. Planejar e executar pesquisa amostral, selecionando uma técnica de amostragem adequada, e escrever relatório que contenha os gráficos apropriados, destacando aspectos como as medidas de tendência central, a amplitude e as conclusões.
9º	Análise de probabilidade de eventos aleatórios: eventos dependentes e independentes	Reconhecer, em experimentos aleatórios, eventos independentes e dependentes e calcular a probabilidade de sua ocorrência, nos dois casos.
	Análise de gráficos divulgados pela mídia: elementos que podem induzir a erros de leitura ou de interpretação	Analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir, às vezes propositadamente, erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas corretamente, omissão de informações importantes (fontes e datas), entre outros.
	Leitura, interpretação e representação de dados de pesquisa expressos em tabelas de dupla entrada, gráficos de colunas simples e agrupadas, gráficos de barras e de setores e gráficos pictóricos	Escolher e construir o gráfico mais adequado (colunas, setores, linhas), com ou sem uso de planilhas eletrônicas, para apresentar um determinado conjunto de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central.
	Planejamento e execução de pesquisa amostral e apresentação de relatório	Planejar e executar pesquisa amostral envolvendo tema da realidade social e comunicar os resultados por meio de relatório contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio de planilhas eletrônicas.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2018)

2. Metodologia

Atendendo o objetivo desse estudo, consideramos que trata-se de uma pesquisa de natureza teórica, pois o que se busca é encontrar nas literaturas sobre Educação Estatística, livros paradidáticos e, nos documentos oficiais sobre a Educação Básica, elementos que são importantes para a elaboração de um livro paradidático de Estatística para os dois anos finais Ensino Fundamental.

Nosso entendimento está pautado nas explicações de Fiorentini e Lorenzato (2006) sobre metodologias de pesquisa. Para eles, existem dois modos de chegar às conclusões, quais sejam: por meio de uma pesquisa de campo ou de laboratório, a qual conduz à coleta e análise de dados/material empírico ou experimental; e por meio da pesquisa teórica ou bibliográfica, que surge com base na literatura, pesquisas ou estudos precedentes, na qual é preciso coletar/organizar dados ou documentos para um tratamento analítico de informações. Complementarmente, dado o objetivo desta pesquisa, podemos dizer que é um estudo de natureza qualitativa, pois o que se busca é a estruturação de um paradidático de Estatística. Sendo assim, a busca está direcionada à identificação de elementos importantes para elaboração desse material, e não ao tratamento quantitativo de dados.

Assim como Coutinho e Campos (2019), entendemos a metodologia como sendo a linguagem estruturante do pensamento acadêmico/científico, ou seja, "aquilo que organiza o raciocínio lógico/analítico/cognitivo pertinente a uma argumentação formal cuja finalidade é a validação ou refutação de uma ou mais hipóteses" (p. 83).

Iniciamos nossa explanação sobre os objetos de conhecimento e as habilidades importantes para o ensino de Estatística nos anos finais do Ensino Fundamental segundo a BNCC. Tendo como ponto de partida as orientações desse documento, visamos criar uma história para o livro paradidático tendo como fio condutor a Modelagem Matemática. Tomaremos como referencial teórico autores que tratam da literacia estatística (Gal, 2002), da Modelagem Matemática (Burack, 2019), e sobre Modelagem Matemática e Educação Estatísca (Campos, 2007; Campos, Wodewotzki e Jacobini, 2011; Perin, 2019; Campos e Perin, 2020; e Perin e Campos, 2020) para dar sustentação ao conteúdo do livro paradidático.

Almouloud e Silva (2019) pontuam que o referencial teórico é a base que sustenta qualquer pesquisa científica. "Esse referencial implica na perspectiva em que um problema será abordado, as diretrizes para sua elaboração e avaliação de sua relevância *a priori* e *a posteriori*" (p. 49). Ainda segundo os autores, o referencial teórico pode garantir a sistematização do conhecimento, distinguindo esse conhecimento do senso comum com base nos procedimentos usados na pesquisa.

3. O livro paradidático

O livro será escrito pelos autores deste capítulo e terá como fio condutor uma história que envolve um torneio de futebol disputado entre equipes de diferentes escolas. Os jogos geram informações estatísticas que os alunos de uma equipe contam e estudam. Essas informações compõem dados que são sintetizados em gráficos e tabelas. Posteriormente, os personagens calculam grandezas que podem ajudar sua equipe vencer o jogo.

O formato e a linguagem adotados no livro visam a ajudar a desenvolver o letramento estatístico. Tomaremos o modelo de letramento de Gal (2002)como norteador, conforme exposto no quadro 2.

Quadro 2 – Modelo de Literacia Estatística

Letramento Estatístico	
Elementos do conhecimento	Elementos de disposição
Habilidade de letramento Conhecimento estatístico Conhecimento matemático Conhecimento contextual Questionamento crítico	Crenças e atitudes Posicionamento crítico

Fonte: Gal (2002, p. 4, tradução nossa)

Ao longo da história serão trazidos tanto os elementos do conhecimento como os de disposição necessários ao desenvolvimento do letramento estatístico.

Considerando que a história do livro retrata uma atividade de Modelagem Matemática, tomaremos a concepção descrita por Burack (2019), o qual a compreende como um conjunto de procedimentos, cujo objetivo é estabelecer um paralelo para tentar explicar matematicamente os fenômenos presentes no cotidiano do ser humano, ajudando-o a fazer predições e a tomar decisões. Para esse autor tais procedimentos estão divididos em cinco etapas, as quais são apresentadas no quadro 3.

Quadro 3 – Objetos de conhecimento a serem abordados em cada etapa da Modelagem Matemática

Etapas da Modelagem Matemática	Objetos de conhecimento
1ª etapa – Escolha do tema	Contextualização do problema, neste caso, o campeonato interescola.
2ª etapa – Pesquisa exploratória	Nessa etapa haverá uma discussão entre os personagens sobre quais informações/dados são importantes para tomar conhecimento sobre o desempenho de um time em um campeonato.
3ª etapa – Levantamento dos problemas	Com os dados já coletados pelos personagens na etapa anterior, é feita uma reflexão sobre a forma de organização, portanto esse momento será destinado a construção e leitura de informações em gráficos e tabelas.
4ª etapa - Resolução do(s) problema(s) e o desenvolvimento do conteúdo matemático no contexto do tema	De forma mais intensa nessa etapa será abordada a obtenção dos valores de medidas de tendência central com a compreensão de seus significados, relacionando-as os gráficos e tabelas construídas na etapa anterior.
Análise crítica das soluções	Por fim, os personagens realizam uma análise e discussão das soluções encontradas de forma que tentam prever e testar suas hipóteses sobre o desempenho de cada time.

Fonte: Os autores

Pretendemos organizar o livro de forma que cada etapa explore mais intensamente determinados objetos de conhecimento.

4. Considerações finais

Com a elaboração desse material, pretendemos contribuir não somente com a prática da leitura nas escola, escrita e oralidade, mas sobretudo, incentivar professores e estudantes a se envolverem em uma atividade investigativa por meio da Modelagem Matemática, de forma a contribuir com o desenvolvimento do letramento estatístico.

Este projeto também estabelece que, após a confecção do livro, será realizado um estudo piloto nos últimos anos da educação básica de uma escola pública (alunos de 13 e 14 anos). A ideia é aplicar um teste de diagnóstico sobre o conteúdo das estatísticas abordadas no livro antes de os alunos o lerem, e aplicar outro teste após a leitura, buscando capturar qualquer diferença no desenvolvimento do letramento estatístico.

Referências

Almouloud, S. A., & Silva, M. J. F. (2019). Construção do referencial teórico de uma pesquisa educacional. In G. P. Oliveira (Org.), *Pesquisa em educação matemática: um olhar sobre a metodologia* (pp. 49-82). Curitiba: CRV.

Brasil (2018). Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>. Acesso em: 27 jul. 2020

Campos, R. C. (2007). *A Educação Estatística: uma investigação acerca dos aspectos relevantes à didática da Estatística em cursos de graduação*. (Tese de doutorado). Programa de Pós Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, Brasil. Recuperado de https://repositorio.unesp.br/handle/11449/102161

Campos, C. R., & Perin, A. P. (2020). Sobre as competências crítica e comportamental na educação estatística. *Zetetiké Revista de Educação Matemática*, *28*(2), 1-19. Recuperado de https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8656795. doi: https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8656795

Campos, C. R., Wodewotzki, M. L. L., & Jacobini, O. R. (2011). *Educação Estatística: teoria e prática em ambientes de Modelagem Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Coutinho, C. Q. S., & Campos, C. R. (2019). Metodologia quantitativa e mista. In G. P. Oliveira (org.), *Pesquisa em educação matemática: um olhar sobre a metodologia* (pp. 83-108). Curitiba: CRV.

Fiorentini, L., & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática.* Campinas: Autores Associados.

Gal, I. (2002). Adult statistical literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, 70(1), 1-25. Recuperado de https://iase-web.org/documents/intstatreview/02.Gal.pdf

Perin, A. P. (2019). Educação Estatística Crítica: um estudo das práticas discentes em um curso de tecnologia. (Tese de doutorado). Programa de Pós Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, Brasil. Recuperado de https://repositorio.unesp.br/handle/11449/182412.

Perin, A. P., & Campos, C. R. (2020). Interfaces da Modelagem Matemática, Raciocínio e Pensamento Estatístico. *Educação Matemática Debate,* 4, 1-22. Recuperado de https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/2724/3060. doi: https://doi.org/10.46551/emd.e202032

Lenguaje de la estimación de la proporción muestral en libros de texto

Juan Jesús Ortiz de Haro[1], Felipe Castro Lugo[2]

[1]Universidad de Granada, [2]Instituto Tecnológico de Sonora

Resumen

En este trabajo analizamos el lenguaje utilizado en el tema de la estimación de la proporción muestral en tres libros de texto españoles de bachillerato. Entre las diferentes perspectivas teóricas para abordar el análisis de libros de texto, hemos elegido el Enfoque Onto-semiótico (EOS), por la importancia que otorga al lenguaje. Los resultados muestran la gran riqueza de expresiones verbales, otras propias de la estadística y probabilidad y las que se refieren a materiales que se utilizan en los juegos de azar. Hay predominio de lenguaje formal y lenguaje simbólico complejo y diverso. El lenguaje numérico contempla todos los sistemas numéricos y se encuentran también gran cantidad de representaciones tabulares y gráficas. Se observan algunas diferencias en los libros que el profesorado debe tener en cuenta al seleccionar y usar estos libros en la enseñanza.

Palabras clave: Inferencia, libros de texto, lenguaje matemático, bachillerato.

1. Introducción

La enseñanza de la inferencia es un tema fundamental de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II, por la importancia que tiene en la sociedad actual (Batanero y Borovcnik, 2016). En segundo curso de Bachillerato (17-18 años) de esta modalidad (MECD, 2015, p. 389), en el *Bloque 4. Estadística y probabilidad* se presentan los siguientes contenidos de inferencia relacionados con la estimación de la proporción muestral:

> Distribución de la media muestral y de la proporción muestral en el caso de muestras grandes. Estimación por intervalos de confianza. Relación entre confianza, error y tamaño muestral. Intervalo de confianza para la media poblacional de una distribución de modelo desconocido y para la proporción en el caso de muestras grandes.

Debido al cambio de directrices curriculares en España, se han editado nuevos libros de texto. El libro de texto es uno de los principales recursos educativos, ya que muchas decisiones de los profesores sobre las tareas a realizar están mediadas por los mismos (Stylianides, 2009). Desde el currículo pretendido al implementado en el aula, una fase importante es el currículo escrito y la forma en que lo interpretan los profesores, a través de los libros de texto (Herbel-Eisenmann, 2007).

El lenguaje es una de las características importantes del libro de texto de matemáticas, por ser un instrumento necesario en la representación y la actividad de matematización y por reflejar la complejidad conceptual de un tema. Respecto al lenguaje utilizado en los libros de texto sobre la estadística y la probabilidad, Ortiz, Serrano y Batanero (2001) estudiaron el lenguaje en dos libros de texto de Educación Secundaria, distinguiendo entre el lenguaje del azar y de la probabilidad, observando en uno de los textos una mayor riqueza del lenguaje empleado respecto al azar así como un vocabulario más rico respecto a la probabilidad, con gradaciones cualitativas, presentando las concepciones subjetivas y frecuencial y conectando con el estudio de la estadística. Gómez, Ortiz, Batanero y Contreras (2013) analizaron el lenguaje utilizado en probabilidad en dos series de libros de texto españoles de Educación Primaria, encontrando una gran riqueza y diversidad de expresiones verbales y predominio de lenguaje coloquial frente al formal; el lenguaje se asocia a diversos significados de la probabilidad (intuitivo, clásico, frecuencial y formal). García y García (2009) realizaron un estudio detallado de los términos específicos sobre la inferencia estadística. Concluyen que el contexto de trabajo es determinante en el significado de los términos y que, en ocasiones, la definición de estos términos que aparece en los libros de texto no corresponde a la propia del contexto matemático, sino más bien a la del contexto cotidiano, lo que según el autor no es adecuado ya que el libro de texto debe presentar al estudiante los conceptos matemáticos de forma correcta.

En este trabajo pretendemos analizar el lenguaje en el tema de estimación de la proporción muestral en tres libros de texto españoles, de segundo curso de Bachillerato de Ciencias Sociales, publicados según la nueva normativa. La finalidad es comparar los resultados con otros estudios previos y las directrices curriculares citadas. A continuación, se describe el marco teórico y la metodología, se presenta el análisis y discusión de los resultados, finalizando con las conclusiones.

2. Marco teórico y metodología

Entre los diversos enfoques para analizar los libros de texto, hemos optado por el Enfoque Onto-semiótico (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), por el importante papel que otorga al lenguaje matemático, al que considera mediador de las prácticas personales o institucionales en la resolución de problemas, por su carácter representacional y operativo. En este marco teórico es también fundamental la idea de conflicto semiótico, que puede surgir al interpretar el lenguaje matemático (Godino, Batanero y Font, 2007).

La muestra está constituida por tres libros de texto, de segundo curso de Bachillerato de Ciencias Sociales de segundo curso de Bachillerato de Ciencias Sociales, publicados en 2016, que se eligieron por ser editoriales de gran prestigio a nivel nacional. Al ser un estudio exploratorio, se trata de una muestra intencional, sin pretensiones de extender las conclusiones. Se incluyen como anexo y se denotan con un código en el trabajo. En estos libros se ha realizado un análisis de contenido del capítulo dedicado a inferencia estadística y estimación de la proporción muestral, estudiando las variables determinadas en Gómez et al. (2013), que permiten lograr el objetivo de este estudio: a) expresiones verbales, según tipología; b) expresiones numéricas; c) símbolos; d) representaciones tabulares y gráficas. Las categorías de cada una de estas variables se determinan mediante sucesivas revisiones de los textos de un modo cíclico e inductivo.

3. Resultados y discusión

3.1 Expresiones verbales

Siguiendo a Shuard y Rothery (1984), hemos tenido en cuenta, las palabras del lenguaje cotidiano, que se usan en el texto con sentido diferente al cotidiano, lo que puede crear problemas de ambigüedad al aplicarlas con un sentido diferente al conocido anteriormente por el estudiante (Barwell, 2005). Dentro de las específicas, siguiendo a

Gómez et al. (2013), hemos diferenciado las que se refieren a juegos de azar y hemos separado las específicas de estadística y de probabilidad (ver Tabla 1).

Tabla 1. Expresiones distintas y frecuencia en los libros de texto según categoría

Tipo	[T1]	[T2]	[T3]
Expresiones cotidianas	14	12	8
Específicas probabilidad	21	14	12
Específicas estadística	42	27	35
Juegos de azar	3	4	0

Fuente: Hecho por los autores

El mayor número de expresiones diferentes son las específicas de estadística y probabilidad, siendo muy escasas las referidas a juegos de azar, al contrario que en el estudio de Gómez et al. (2013) con textos de primaria, y en Ortiz et al. (2016) con textos de secundaria. Observamos un aumento en la formalización y variedad del lenguaje en Bachillerato.

3.2 Lenguaje numérico

En los tres libros de texto encontramos los mismos tipos de números: Números enteros que suelen expresar el tamaño de la muestra o el valor de los parámetros de las distribuciones; decimales y fracciones que a veces aparecen en la misma expresión; porcentajes que se utilizan para expresar probabilidades. Los irracionales aparecen en la fórmula de la desviación típica de la distribución de la proporción muestral, al contrario que en Ortiz et al. (2016) que no se presentaban.

3.3 Lenguaje simbólico

En los tres textos queda reflejada una gran variedad de lenguaje simbólico. En todos ellos aparecen las operaciones aritméticas, igualdades y desigualdades. La notación conjuntista se presenta en todos los textos excepto en [T3]: el símbolo {}, para presentar los elementos de un conjunto: "*Si* $\{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ *es una muestra*" (T2, p. 290) o el símbolo de pertenencia $\in$, para expresar la probabilidad de que un parámetro pertenezca a un intervalo de confianza, con nivel de confianza (1-α):

$$“P\left[p \in \left(pr - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}, pr + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pq}{n}}\right)\right] = 1 - \alpha" \text{ (T1, p. 324)}$$

Los símbolos de implicación suelen indicar cálculos encadenados. El texto [T3] es el único que presenta una sumatoria (T3, p. 303). Es muy amplia la presencia de símbolos literales en todos los textos.

Los resultados muestran la gran riqueza y complejidad del lenguaje simbólico, como en el trabajo de Ortiz et al. (2016), pero con mayor complejidad, indicador del alto grado de formalización que se pretende alcancen los estudiantes del Bachillerato.

3.4 Lenguaje tabular

El único texto que presenta tablas es el [T1]: una tabla resumen de niveles de confianza e intervalos de confianza (Figura 1.a), y otra tabla con datos de proporción en la población y tamaño de la muestra (Figura 1.b), ambas en la sección de ejercicios.

a. Tablas de resultados (T1, p.317)

	RESUMEN	
	NIVEL DE CONFIANZA	INTERVALO DE CONFIANZA
a)	90 %	(0,54; 0,70)
b)	95 %	(0,525; 0,715)
c)	99 %	(0,495; 0,745)

b. Tabla de datos (T1, p.320)

	a)	b)	c)	d)	e)	f)
PROPORCIÓN, p, EN LA POBLACIÓN	0,5	0,6	0,8	0,1	0,05	0,15
TAMAÑO, n, DE LA MUESTRA	10	20	30	50	100	100

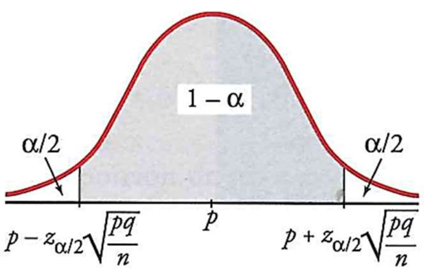
Figura 1. Distintos tipos de tablas encontradas en los textos
Fuente: Colera y cols. (2016)

Destacar que la presencia de tablas es casi nula, al contrario que en Ortiz et al. (2016), donde sí había una gran variedad de lenguaje tabular.

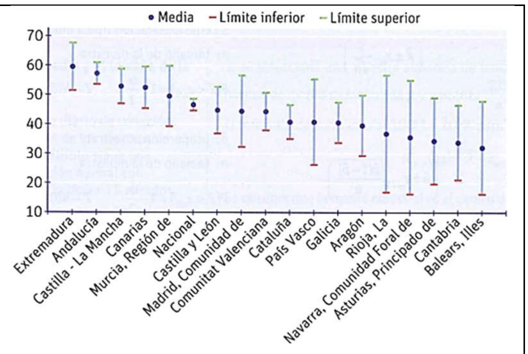
3.5 Lenguaje gráfico

Las gráficas de la normal y de la binomial aparecen en los tres textos, aunque en algunos de ellos en un tema previo al de la estimación de la proporción muestral. Sobre la proporción solo hemos encontrado dos gráficas: En el texto [T1] se presenta un ejemplo del intervalo de confianza para la proporción, con un nivel de confianza (1-α) construido con una muestra de tamaño n (Figura 2.a), y en el texto [T3], en la sección de aplicaciones, hay una gráfica donde se muestra el intervalo de confianza para la proporción poblacional de parados en el tercer trimestre de 2015 (Figura 2.b).

Se observa también que el empleo de gráficas disminuye con respecto a textos de niveles inferiores (Ortiz et al., 2016), aunque son de mayor complejidad, como es esperable en este nivel educativo.



a. Interv.confianza proporción (T1, p. 314)



b. Intervalos de confianza (T3, p.327)

Figura 2. Ejemplos de gráficos en los textos
Fuente: Colera et al. (2016); Sanz et al. (2016)

4. Conclusiones

Los resultados muestran la gran riqueza y diversidad de lenguaje en los textos analizados, que el profesor ha de tener en cuenta para valorar la dificultad que supone para los alumnos. Como indican Ortiz et al. (2001), a esta dificultad se añade el uso de algunas palabras del lenguaje cotidiano, con significado diferente, en el tema de probabilidad.

Se encontraron mayor número de expresiones verbales específicas de la estadística con respecto a las de la probabilidad, y muy pocas relativas a los juegos de azar que si aparecen en el estudio de Ortiz et al. (2016). Hay un texto que no hace referencia al uso de la tecnología, en contra de las orientaciones curriculares.

Para que los estudiantes consoliden un lenguaje matemático más avanzado, los profesores deben cuidar el lenguaje formal que se utiliza en el aula, evitando dar definiciones incompletas o incorrectas que no se corresponden con el significado matemático y que pueden generar obstáculos en el aprendizaje del alumnado (García y García, 2009). Dada la importancia del tema se considera necesario ampliar el estudio con otros textos.

Referencias

Barwell, R. (2005). Ambiguity in the mathematics classroom. *Language and Education 19*(2), 118–126.

Batanero, C., & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school.* Rotterdam: SensePublishers.

Herbel-Eisenmann, B. A. (2007). From intended curriculum to written curriculum: Examining the "voice" of a mathematics textbook. *Journal for Research in Mathematics Education, 38*(4), 344-369.

García, I. y García, J. A. (2009). Enseñanza de la estadística y lenguaje: un estudio en bachillerato. *Educación Matemática, 21* (3), 95-126.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39* (1-2), 127-135.

Gómez, E., Ortiz, J. J., Batanero, C. y Contreras, J. M. (2013). El lenguaje de probabilidad en los libros de texto de Educación Primaria. *Unión*, *35*, 75-91.

MECD (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Madrid: *Boletín Oficial del Estado*.

Ortiz, J. J., Albanese, V. y Serrano, L. (2016). El lenguaje de la estadística y probabilidad en libros de texto de Educación Secundaria Obligatoria. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 397-406). Málaga: SEIEM.

Ortiz, J. J., Serrano, L., Batanero, C. (2001). El lenguaje probabilístico en los libros de texto. *Suma, 38*, 5-14.

Schleppegrell, M. (2007). The linguistic challenges of mathematics teaching and learning: A research review. *Reading and Writing Quarterly, 23*,139-159.

Shuard, H. &Rothery, A (Eds) (1984). *Children reading mathematics*. London: Murray.

Stylianides, G. J. (2009). Reasoning-and-Proving in School Mathematics Textbooks. *Mathematical thinking and learning, 11*(4), 258-288.

ANEXO: Textos empleados en el análisis.

[T1]. Colera, J., Oliveira, M. J., Colera, R. (2016). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II. 2º Bachillerato.* Madrid: Anaya.

[T2]. Gámez, J., Marín, S., Martin, A., Pérez, C. y Sánchez, D. (2016). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II. 2º Bachillerato*. Madrid: Santillana.

[T3]. Sanz, L., Alcaide, F., Hernández, J., Moreno, M. y Serrano, E. (2016). *Matemáticas aplicadas a las Ciencias Sociales II. 2º Bachillerato*. Madrid: SM.

Macro y microestructuras en los libros de texto de matemáticas. El caso de la microestructura de las medidas de dispersión en 3º y 4º de ESO.

Jesús del Pino Ruiz, Antonio Estepa Castro

Universidad de Jaén

Resumen

El trabajo que presentamos es parte de un proyecto más amplio sobre la investigación didáctica de la dispersión y sus medidas en los cursos 3º y 4º de la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) en España (14 - 15 años). Nos centramos en el análisis de los libros de texto de la ESO, atendiendo a su estructura. Hemos constatado, en el análisis de la macroestructura, que los libros de texto exponen los contenidos en el mismo orden que se expresan en las dispersiones oficiales del curriculum, lo que implica que el bloque de Estadística y Probabilidad aparezca siempre el último con el riesgo de no ser impartido si ocurriese alguna contingencia en el desarrollo del curso escolar. En el análisis de la microestructura hemos observado que en algunos textos faltan o están deficientemente expuestos contenidos prescriptivos del curriculum. Esperamos que nuestros hallazgos sean de interés para la intervención didáctica.

Palabras clave: Libros de texto, medidas de dispersión, macroestructura, microestructura

1. Introducción

Este trabajo forma parte de un proyecto más amplio sobre investigación didáctica de la dispersión y sus medidas en la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO) en España. Parte de este proyecto es un estudio sobre el tratamiento de las medidas de dispersión en los libros de texto utilizados en ese nivel de enseñanza (Del Pino, 2019) y que resumimos en el presente trabajo. El objetivo de este trabajo es caracterizar las medidas de dispersión en libros de texto de la ESO.

La presencia de los libros de texto en la enseñanza es bien patente, en consecuencia, al realizar una investigación didáctica sobre un contenido matemático es de interés incluir el estudio de los libros de texto y, más pertinente aún, si tenemos la sospecha de que la apropiación del contenido matemático por parte de los estudiantes es problemática, como es nuestro caso.

Analizamos la estructura de los libros de texto siguiendo a Valverde et al. (2002), entendiendo por macroestructura las características que recorren todo el libro, el armazón que lo integra y que nos proporciona la visión de las Matemáticas que se quiere transmitir. En contraposición la microestructura se refiere a la estructura asociada a un bloque de contenido que se pretende impartir en unas pocas sesiones.

Se describe la investigación y los resultados obtenidos, terminamos el trabajo discutiendo los resultados obtenidos y la obtención de unas conclusiones.

2. Fundamentos teóricos y metodología

La investigación didáctica sobre libros de texto se ha incrementado en las últimas décadas, con diferentes enfoques y constructos. En nuestro caso hemos analizado la estructura de los libros porque según Valverde et al. (2002) puede proporcionar conocimiento sobre el aprendizaje de los contenidos incluidos en el texto. Hemos realizado un estudio exploratorio siguiendo los trabajos de Love y Pimm (1996), Valverde et al. (2002) y Mikk, J. (2000) entre otros.

La muestra de libros de texto estuvo compuesta por los libros más utilizados en Andalucía. Se analizaron 12 libros de texto de los cursos 3º, 4ºA y 4ºB de la ESO, de las editoriales Anaya Santillana, SM y Oxford, un libro de cada editorial por cada uno de los 3 cursos. La obtención de la muestra se describe en Del Pino y Estepa (2015).

3. Análisis de la estructura de los libros de texto

Macroestructura. Se ha incluido en Del-Pino y Estepa (2019), aquí realizaremos un resumen. Se analiza el contenido curricular: bloques de contenido y orden de estos.

La macroestructura depende del curriculum oficial, obviamente distinto para cada curso, en consecuencia, en el análisis de la macroestructura se distinguirán los tres cursos. En los tres cursos analizados el curriculum que tiene cinco bloques de contenido: Aritmética (Números), Algebra, Análisis, Geometría y Estadística y Probabilidad. En la tabla 1 analizamos la estructura capitular de los textos de 3º de ESO, en 4º de ESO es similar. El espacio dedicado en cada libro al bloque de Estadística y Probabilidad se expone en la tabla 2.

Tabla 1. Estructura de capítulos de los textos de 3ª de ESO

	3A	3S	3O	3SM
Capítulo 1	Fracciones y decimales	Números racionales	Números racionales	Números reales
Capítulo 2	Potencias y raíces. Números aproximados	Números reales	Números reales	Potencias y raíces
Capítulo 3	Progresiones	Polinomios	Sucesiones numéricas	Proporcionalidad directa e inversa
Capítulo 4	El lenguaje algebraico	Ecuaciones de primer y segundo grado	Polinomios	Sucesiones. Progresiones
Capítulo 5	Ecuaciones	Sistemas de ecuaciones	Ecuaciones	Polinomios
Capítulo 6	Sistemas de ecuaciones	Proporcionalidad numérica	Sistemas de ecuaciones	División de polinomio. Raíces
Capítulo 7	Funciones y gráficas	Progresiones	Métrica del triángulo	Expresiones fraccionarias y radicales
Capítulo 8	Funciones lineales	Lugares geométricos. Figuras planas	Lugares geométricos	Ecuaciones. Sistemas de ecuaciones
Capítulo 9	Problemas métricos en el plano	Cuerpos geométricos	Movimientos	Funciones
Capítulo 10	Cuerpos geométricos	Movimientos y semejanzas	La esfera y el globo terráqueo	Funciones lineales y cuadráticas
Capítulo 11	Transformaciones geométricas	Funciones	Funciones	Geometría del plano
Capítulo 12	Estadística	Funciones lineales y afines	Funciones elementales	Traslaciones, giros y simetrías en el plano
Capítulo 13	Azar y probabilidad	Estadística	Estadística	Figuras y cuerpos geométricos
Capítulo 14	Calculadora	Probabilidad	Azar y probabilidad	Tablas y gráficos estadísticos
Capítulo 15				Parámetros estadísticos
Capítulo 16				Sucesos aleatorios. Probabilidad

A = Anaya; S = Santillana; O = Oxford; SM = SM

Tabla 2. Porcentaje de páginas dedicado a cada bloque de contenidos en los libros de texto analizados

Bl. Con	3º de ESO				4º de ESO Opción A				4º de ESO Opción B			
	3A[1]	3S	3O	3SM	4A A[1]	4A S[1]	4A O	4A SM	4B A[1]	4B S[1]	4B O	4B SM
N	10,9	21,7	15,4	17,9	26,3	28,2	19,9	17,5	8,9	14,9	10,1	7,4
Á	24,5	28,1	27,6	29,6	20,7	13,7	21,4	16,1	16,1	20,2	21,3	24,2
G	23,1	21,3	27,6	19,3	14,2	20,2	21,4	21	25	19,5	23,7	18,8
A	13,5	12,5	13	11,7	17,2	14,1	12,5	18,2	16,9	19,8	13,6	32,2
E y P	13,5	12,5	13,4	17,2	13,4	17,9	15,1	22,3	24,2	18,7	21,9	20,8

N = Números; Á = Álgebra; G = Geometría; A = Análisis; E y P = Estadística y Probabilidad

[1] Presentan una unidad para trabajar problemas, repaso y/o otra para calculadora

Se puede observar que en los libros de 3º y 4º opción A, el bloque de Estadística y Probabilidad es el que menor espacio ocupa, salvo en el libro de la editorial SM, 4ASM. En 4º opción B los porcentajes están más equilibrados si se tiene en cuentan que el porcentaje de Aritmética baja y dicho espacio lo ocupará de manera natural Álgebra y Análisis.

Microestructura. Se analizará los libros desde dos perspectivas: a) como está distribuido los capítulos de cada libro, tabla 3, siguiendo a Valverde et al. (2002) y b) cómo se trabaja cada contenido sobre las medidas de dispersión incluido en el curriculum, seguiremos lo indicado por Love y Pimm (1996), en su estudio de la microestructura para que un contenido se considerase bien trabajado debía contener tres partes, explicación o exposición del contenido, ejemplo y ejercicios para trabajarlo. A esto lo llamamos microestructura expositiva.

En cada capítulo hemos considerado los siguientes elementos de microestructura: Lectura introductoria, actividades de introducción, desarrollo contenidos, mapa conceptual o resumen, ejercicios finales, recursos online y propuesta de investigación. De las lecturas y actividades introductorias se puede deducir la filosofía pedagógica que la editorial pretende: relacionar el tema con la historia del desarrollo de los saberes matemáticos, con las ideas previas de los estudiantes sobre el tema, motivar al estudiante en el estudio del tema, o bien, mostrar la utilidad de los contenidos que se van a estudiar (enfoque competencial). Los libros de Santillana (3S, 4AS y 4BS) no tienen este tipo de actividades, lo que indica desinterés por la exploración de ideas previas o usos de los saberes matemáticos. En algunos textos falta un resumen final muy útil para organizar las ideas, relacionar los elementos del tema y obtener una visión global del mismo. Santillana y Oxford no incluyen recursos "on line". Los demás elementos están en todos los libros.

Tabla 3. Microestructura del capítulo en los libros de texto.

Elementos microestr.	3A	3S	3O	3SM	4A A	4B A	4A S	4B S	4A O	4B O	4A SM	4B SM
Lectura introductoria	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Actividades de introducción	X		X	X	X	X			X	X	X	X
Desarrollos contenidos	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Mapa conceptual o resumen		X	X	X			X	X			X	X
Ejercicios finales	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Recursos online	X			X	X	X					X	X
Propuesta de investigación	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X

En cuanto a los contenidos sobre medidas de dispersión (tablas 4, 5 y 6) en los libros analizados un hecho sorprendente es que en algunos libros faltan contenidos prescriptivos del curriculum oficial, en otros pueden estar demasiado escuetos o incompletos (4AS en tablas 4, 4BS, tabla 5).

Tabla 4. Microestructura de las medidas de dispersión en los textos de 3º de ESO

Contenidos	3A	3S	3O	3SM
Rango	X	*		X
Desviación típica	X	X	X	X
Varianza	X	X		X
Interpretación conjunta de la media y la desviación típica	X			X
Comparación de conjuntos de datos	X	X		X

*No incluye ejemplo, solo exposición y ejercicios.

Tabla 5. Microestructura de las medidas de dispersión en los textos de 4º de ESO opción A

Contenidos	4AA	4AS	4AO	4ASM
Desviación típica	X	X	X	X
Varianza	X	X	X	X
Coeficiente de variación	X	X	[2]	X
Comparación de distribuciones	X	X		X
Cuartiles	X	X	X	X
Diagrama de caja	X	[1]		X

[1]Se incluye en los ejercicios finales de forma escueta e incompleta. [2]No incluye ejemplo, solo exposición y ejercicios.

Tabla 6. Microestructura de las medidas de dispersión en los textos de 4º de ESO opción B

Contenidos	4BA	4BS	4BO	4BSM
Desviación típica	X	X	X	X
Varianza	X	X	X	X
Coeficiente de variación	X	X	X	X
Influencia de los valores atípicos			X	X
Elección de medidas de dispersión en función de los valores atípicos			X	
Comparación de distribuciones	X		X	X
Cuartiles	X	X	X	X
Diagrama de caja	X	*	X	X

*Se incluye en los ejercicios finales de forma escueta e incompleta.

4. Conclusiones

Hemos visto que la Estadística y Probabilidad aparece en los últimos temas del libro en los tres cursos y en las 4 editoriales, lo mismo que ocurre en el curriculum oficial, en consecuencia, y al seguir la enseñanza el orden de los temas que se establecen en el libro de texto, el último bloque a enseñar es la Estadística y la Probabilidad, en muchas ocasiones se queda sin desarrollar por múltiples circunstancias (por ejemplo, falta de tiempo). Esto lo hemos constatado en Del Pino (2019), donde se preguntó a una extensa muestra de centros de ESO de Andalucía si habían impartido el curso escolar anterior el bloque de Estadística y Probabilidad y el 67,81% respondió que en 3º de ESO no se había impartido el bloque de Estadística y probabilidad el curso anterior.

La falta de contenidos prescriptivos curriculares en los libros de texto es inadmisible, puede ser debido a que desde la aprobación de la LOE los libros de texto no precisan de la autorización de la Administración educativa. La disposición adicional cuarta apartado 2 de la LOE dice: "*2. La edición y adopción de los libros de texto y demás materiales no requerirán la previa autorización de la Administración educativa. En todo caso, estos deberán adaptarse al rigor científico adecuado a las edades de los alumnos y al currículo aprobado por cada Administración educativa*." (MEC, 2006, p.86). Esta disposición adicional cuarta no ha sido modificada en la LOMCE (MECD, 2013), es decir, sigue vigente. Esperamos que estos hallazgos sean de interés para la enseñanza.

Referencias

Del Pino Ruiz, J. (2019). *Las medidas de dispersión en la Educación Secundaria Obligatoria: Análisis de libros de texto y de la comprensión de los estudiantes.* Tesis doctoral. Universidad de Jaén. Disponible en: https://iase-web.org/Publications.php?p=Dissertations

Del-Pino, J. y Estepa, A. (2015). Analisis de libros de texto. Estadistica de libros empleados en Andalucia. En J. M. Contreras, C. Batanero, J. D. Godino, G. R. Canadas, P. Arteaga, E. Molina, … M. M. Lopez (Eds.), Actas de las II Jornadas Virtuales en Didactica de la Estadistica, Probabilidad y Combinatoria (pp. 117-124).

Del-Pino, J. y Estepa, A. (2019). Estudio de la presencia de la estadística en libros de 3º y 4º cursos de ESO a través del análisis de su macroestructura. En J. M. Contreras,

M. M. Gea, M. M. Lopez-Martin y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.*

Love, E. y Pimm, D. (1996). 'This is so': a text on texts. En A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 371–409).

MEC. (2006). Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación.

MECD. (2013). Ley Organica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa.

Mikk, J. (2000). *Textbook: Research and Writing.* Baltische Studien zur Erziehungs und Sozialwissenschaft, Band 3 (Baltic Studies for Education and Social Sciences, Volume 3). Recuperado de http://eric.ed.gov/?id=ED451244

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. y Houang. (2002). According to the Book: Using TIMSS to Investigate the Translation of Policy Into Practice Through the World of Textbooks. Springer S

As organizações didáticas e matemáticas em livros textos no brasil

Cileda de Queiroz e Siva Coutinho[1], Amari Goulart[2]

[1]Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

[2]Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

Resumo

Este trabalho tem por objetivo analisar como as organizações matemáticas e didáticas, no sentido proposto por Chevallard (1999), são apresentadas nos livros didáticos utilizados nas escolas públicas brasileiras. Para atingirmos tal objetivo, analisamos duas coleções de livros didáticos, uma voltada para os quatro últimos anos do ensino fundamental e a outra para o ensino médio, ambas aprovadas pelo Programa Nacional do Livro Didático. De acordo com as análises, encontramos uma Organização Matemática limitada a um saber fazer cuja razão de ser não é mais significativa, e uma Organização Didática tecnicista.

Palavras-chave: Livros Didáticos, Organização Matemática, Organização Didática, Probabilidade.

1. Introdução

O objetivo deste artigo é analisar como são propostas as Organizações Matemáticas e as Organizações Didáticas, no sentido proposto por Chevallard (1999), nos livros didáticos de matemática utilizados na escola básica brasileira.

Segundo Silva (1996), a importância da análise de livros didáticos no Brasil deve-se a que:

> [...] O livro didático é uma tradição tão forte dentro da educação brasileira que o seu acolhimento independe da vontade e da decisão dos professores. Sustentam essa tradição o olhar saudosista dos pais, a organização escolar como um todo, o marketing das editoras e o próprio imaginário que orienta as decisões pedagógicas do educador. (SILVA, 1996, p. 8)

Além disso, Dante (1996), Lajolo (1996), E.T. Silva (1996) e M.A. Silva (2012) apontam que a precária situação do sistema educacional brasileiro permite que o livro didático no Brasil defina conteúdos e estratégias de ensino, portanto determinando de forma decisiva o que se ensina e como se ensina, isto é, o livro didático determina as organizações matemáticas e as organizações didáticas no sistema educacional brasileiro, conforme discutiremos na sequência.

2. Organização Didática e Organização Matemática

Segundo Chevallard (1999), uma Organização Matemática é uma resposta a uma tarefa ou a um conjunto de tarefas. Embora o autor não defina claramente o que seja uma Organização Matemática, ele nos fornece um esboço para compreendermos a sua estrutura.

O autor postula que a Organização Matemática é constituída de quatro principais componentes: tipos de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias e as relações dinâmicas que operam entre essas componentes é denominado por Chevallard (1999) de organização praxeológica.

Observando-se tais relações, cujo objetivo é responder questões a um determinado conjunto de atividades matemáticas, emergem duas faces inseparáveis desta organização, que o autor denomina de bloco do saber fazer e bloco do saber.

Unindo-se esses dois blocos referentes a um conjunto de atividades matemáticas, temos uma Organização Matemática. Paralelamente à noção de Organização Matemática, emerge a noção de Organização Didática, que segundo Chevallard (1999), refere-se às respostas mais ou menos explícitas referentes a "práxis" determinada pelas tarefas e pelas técnicas didáticas e o "logos" determinado pela justificativa sobre o saber-fazer, isto é, as tecnologias e teorias didáticas.

Consideremos, a título de exemplo, a Organização Matemática relativa ao estudo do objeto matemático Equação do segundo grau. Tal organização possui suas tarefas, suas técnicas e seu discurso teórico-tecnológico, e podemos então elaborar a seguinte questão: "Como ensinar equações do segundo grau para os alunos da Educação Básica?"

Podemos colocar tal questão na forma da seguinte tarefa: "Ensinar a Equação do segundo grau para os alunos da Educação Básica." De acordo com Chevallard (1999), tal tarefa possui, no mínimo, uma técnica para que se possa executá-la, que por sua vez possui um discurso teórico-tecnológico construído a partir das teorias desenvolvidas no âmbito da Didática da Matemática.

3. Metodologia

Para determinar quais são as Organizações Matemáticas e as Organizações Didáticas presentes nos tópicos de Probabilidade que são abordados nos livros didáticos de matemática utilizados nas escolas da educação básica no Brasil, analisamos uma coleção destinada aos quatro últimos anos do ensino fundamental e outra destinada ao ensino médio sendo que ambas foram as mais distribuídas pelo Programa Nacional do Livro Didático, conforme nos indica o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação - FNDE, órgão responsável pela compra e distribuição dos livros nas escolas públicas brasileiras.

4. Análise das coleções

O capítulo destinado ao estudo de probabilidade no ensino fundamental está no volume 9, e possui 22 páginas que são organizadas nas seguintes sessões: Qual é a chance?, as probabilidades e a estatística, população e amostra. A abordagem limita-se aos espaços amostrais equiprováveis, e apresenta aos alunos a definição clássica de probabilidade, conforme Figura 1.

$$\text{probabilidade} = \frac{\text{número de possibilidades favoráveis}}{\text{número total de possibilidades}}$$

Figura 1. Definição laplaciana de probabilidade

Fonte: Andrini e Vasconcelos, 2012, p. 134

O capítulo destinado ao estudo de probabilidades no ensino médio está no Volume 2, e possui 32 páginas que são organizadas em sessões: fenômenos aleatórios, espaço amostral e eventos, eventos certo, impossível e mutuamente exclusivos, cálculo de probabilidades, definição teórica de probabilidade e suas consequências, o método binomial, aplicações de probabilidade à genética. Assim como indicada no ensino fundamental, a abordagem limita-se aos espaços amostrais equiprováveis e novamente apresenta aos alunos a definição laplaciana de probabilidade, conforme Figura 2.

$$p(A) = \frac{\text{número de elementos de } A}{\text{número de elementos de } \Omega} = \frac{n(A)}{n(\Omega)} \text{ ou } p(A) = \frac{\text{número de resultados favoráveis}}{\text{número total de resultados possíveis}}$$

Figura 2. Definição laplaciana de probabilidade
Fonte: Dante, 2016, p.234

Figuras 3 e 4 apresentam um exemplo de atividade que demanda a tarefa “calcular a probabilidade de um evento”:

5 Um presente foi sorteado entre 4 meninas e 3 meninos. Qual é a probabilidade de uma menina ganhar o presente? $\frac{4}{7}$

Figura 3. Exercício resolvido com a tarefa "determinar a probabilidade de um evento"
Fonte: Andrini e Vasconcelos, 2012, p.139

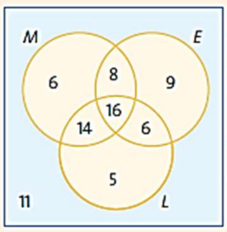
7. Em um grupo de 75 jovens, 16 gostam de música, esporte e leitura; 24 gostam de música e esporte; 30 gostam de música e leitura; 22 gostam de esporte e leitura; 6 gostam somente de música; 9 gostam somente de esporte; e 5 jovens gostam somente de leitura.

a) Qual é a probabilidade de, ao apontar ao acaso um desses jovens, ele gostar de música?

b) Qual é a probabilidade de, ao apontar ao acaso um desses jovens, ele não gostar de nenhuma dessas atividades?

Resolução:

Nesse caso, elaboramos o diagrama de Venn ao lado, considerando M = música, E = esporte e L = leitura.



Observamos que:

- $6 + 8 + 16 + 14 = 44 \rightarrow$ 44 gostam de música.
- $75 - (6 + 9 + 5 + 8 + 6 + 14 + 16) = 75 - 64 = 11 \rightarrow$ 11 não gostam de nenhuma dessas atividades.

Como $n(\Omega) = 75$, temos:

a) probabilidade de gostar de música: $p(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{44}{75} \simeq 0{,}586 \simeq 59\%$

b) probabilidade de não gostar de nenhuma dessas atividades: $p(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{11}{75} \simeq 0{,}146 \simeq 15\%$

Logo, ao se apontar ao acaso um desses jovens, a probabilidade de ele gostar de música é $\frac{44}{75} \simeq 59\%$, e a probabilidade de ele não gostar de nenhuma dessas atividades é de $\frac{11}{75} \simeq 15\%$.

Figura 4. Exercício resolvido com a tarefa "determinar a probabilidade de um evento"
Fonte: Dante, 2016, p.236

Podemos observar que a técnica utilizada em ambas as tarefas é a que podemos chamar de conjuntista: a partir da construção do diagrama de Venn considerando os dados contidos no enunciado, busca-se nesse diagrama as informações necessárias para a resposta às questões apresentadas. Observemos que o item (a) e o item (b) constituem-se em tarefas iguais, no caso "determinar a probabilidade de um evento." O discurso tecnológico teórico é a definição laplaciana de probabilidade e técnica de contagem por diagrama de Venn, e trata-se do mesmo discurso apresentado no ensino fundamental. Observemos também que o exercício resolvido apresentado constitui um modelo para os exercícios que seguem na sessão de exercícios propostos para a determinação de probabilidade a partir da técnica conjuntista. Não observamos atividades que demandem que o aluno busque uma técnica distinta para a resolução.

9. Em uma enquete foram entrevistados 100 estudantes. Setenta deles responderam que frequentavam um curso de Informática, 28 responderam que frequentavam um curso de Inglês e 10 responderam que frequentavam ambos, Informática e Inglês. Qual é a probabilidade de um desses estudantes, selecionado ao acaso:

a) estar frequentando somente o curso de Informática?

b) não estar frequentando nenhum desses cursos?

10. Em uma enquete foram entrevistadas 80 pessoas sobre os meios de transporte que utilizavam para ir ao trabalho e/ou à escola. Quarenta e duas responderam ônibus, 28 responderam carro e 30 responderam moto. Doze utilizavam-se de ônibus e carro, 14, de carro e moto e 18, de ônibus e moto. Cinco utilizavam-se dos três: carro, ônibus e moto. Qual é a probabilidade de que uma dessas pessoas, selecionada ao acaso, utilize:

a) somente ônibus? $\frac{17}{80}$

b) somente carro? $\frac{7}{80}$

c) carro e ônibus, mas não moto? $\frac{7}{80}$

d) nenhum dos três veículos? $\frac{19}{80}$

e) apenas um desses veículos? $\frac{27}{80}$

Figura 5. Exercícios propostos sobre cálculo de probabilidade

Fonte: Dante, 2016, p. 237

Destacamos que também são encontradas atividades resolvidas e propostas sobre cada uma das sessões que compõem o capítulo tanto no ensino fundamental como no ensino médio.

Analisando os conteúdos em questão na coleção voltada para os quatro últimos anos do ensino fundamental, encontramos as seguintes tarefas relacionadas à probabilidade: Dado um experimento aleatório descrever o espaço amostral; Calcular a probabilidade de um evento; Comparar a probabilidade de eventos; Calcular a probabilidade de um evento complementar; Calcular a probabilidade da união de eventos; e Calcular o número de elementos de um determinado evento. Tais tarefas estão associadas a um número bastante reduzido de técnicas que são comuns a elas (uma técnica é a forma de realizar essa tarefa) e todas são justificadas pelo mesmo discurso tecnológico-teórico: definição de espaço amostral, definição da probabilidade segundo o enfoque clássico, probabilidade da união de eventos, probabilidade do evento complementar de um evento. Observe-se aqui que não encontramos uma tarefa que solicite a explicitação da experiência aleatória em jogo.

Analisando os conteúdos referentes ao ensino médio, encontramos as seguintes tarefas relacionadas à probabilidade: Determinar o espaço amostral e os eventos de um experimento aleatório; Calcular a probabilidade de um evento; Calcular a probabilidade da união de eventos; Calcular a probabilidade de um evento complementar; Calcular a probabilidade de um evento condicionado; Verificar a independência de dois eventos; Calcular a probabilidade de um evento utilizando a distribuição binomial. Novamente observamos um número bastante reduzido de tipo de tarefas e de técnicas, sempre justificados pelo mesmo discurso tecnológico-teórico. Vale destacar que apesar desse número reduzido na diversidade das tarefas, elas evoluem em relação àquelas encontradas no livro do ensino fundamental apenas se considerarmos os conteúdos que são apresentados nos documentos curriculares: probabilidade condicional, independência de eventos e distribuição binomial.

Analisando as tarefas encontradas, percebemos que mais de 50% das abordadas no ensino fundamental voltam a surgir no ensino médio; além disso, também concluímos que as coleções enfatizam o bloco “saber fazer” em detrimento ao bloco do “saber”, que é quase ausente nas Organizações Matemáticas identificadas nas obras analisadas. Além disso, algumas tarefas são enfatizadas em detrimento de outras. Em geral, a tarefa “Cálculo da probabilidade de um evento” é a mais frequente nas coleções analisadas, assim como observado na coleção destinada ao ensino fundamental.

Em relação às Organizações Didáticas, predomina-se a tecnicista, segundo a classificação de Gáscon (2003), e tal organização implica a perspectiva de que ensinar e aprender matemática é ensinar e aprender algoritmos, com todo o reducionismo que isso envolve. Conforme as Figuras 2 e 3, podemos observar que embora todos apliquem os conteúdos teóricos apresentados, os exercícios não demandam, em sua maior parte, o desenvolvimento de estratégias diferenciadas. Destacamos que esses exercícios podem ser considerados uma preparação para o Exame Nacional do Ensino Médio, que conforme Coutinho e Figueiredo (no prelo), apresenta o mesmo tipo de tarefas que os livros didáticos, mas com enunciados trazendo contextos com linguagem mais complexa.

Nota-se que nas atividades propostas das obras analisadas, as tarefas pedidas envolvem geralmente como técnica a utilização de algoritmos, em detrimento da interpretação dos dados, e tal perspectiva não favorece do letramento probabilístico, conforme aponta Gal (2005). Para ele o letramento envolve cinco componentes básicos, que são categorizados como elementos cognitivos e elementos disposicionais: grandes tópicos (abordagem com tópicos fundamentais: variação, aleatoriedade, independência, previsibilidade e incerteza), cálculos probabilísticos (maneiras de encontrar ou estimar a probabilidade de eventos), linguagem (termos e métodos usados para comunicar sobre probabilidade), contexto (compreender o papel e as implicações das questões probabilísticas nas mensagens em vários contextos, incluindo os cotidianos) e questões críticas (questões para refletir quando se lida com probabilidade). Os elementos disposicionais envolvem postura crítica; crenças e atitudes; e sentimentos pessoais sobre incerteza e riscos. Nas coleções analisadas percebemos a carência de exploração da linguagem, do contexto e, principalmente, das questões críticas. As crenças e atitudes são praticamente ignoradas nas OM identificadas, tanto na coleção destinada ao ensino fundamental como naquela destinada ao ensino médio.

5. Conclusão

Nos termos da TAD, temos que questionar a razão de ser das organizações praxeológicas relativas à probabilidade presentes nos livros didáticos destinados ao Ensino Fundamental II e Ensino Médio na escola brasileira, de forma a que possamos analisá-las. É necessário, nos termos de Lucas, Fonseca, Gascón e Casas (2014), que o bloco prático-técnico (tarefa/técnica) "não viva isolado do bloco tecnológico-teórico ou do "discurso racional" que possa mostrar a pertinência de trabalhar com certo tipo de tarefas" (p.6).

Nossa pesquisa leva-nos a questionar se as praxeologias matemáticas identificadas nos livros didáticos analisados não perderam sua "razão de ser", ou seja, nos termos dos autores supracitados: "não desapareceram dessa instituição escolar as questões as quais ditas praxeologias poderiam vir a dar resposta e, consequentemente, o seu estudo na citada instituição deixou de fazer sentido" (pp. 6-7).

Seguimos pesquisando e buscando possíveis razões de ser para as praxeologias matemáticas relativas à probabilidade na Escola Básica brasileira.

Referências

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes em théorie anthropologique du didactique. *Recherches em Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-265.

Dante, L. D. (1996). Livro didático de matemática: uso ou abuso? *Em aberto*, 69, 52-58.

Dante, L. R.. (2016) Matemática: contexto & aplicações: ensino médio. São Paulo: Ática.

Gascón, J. (2003). La necesidad de utilizar modelos en didáctica de las matemáticas. *Educação Matemática Pesquisa*, 5, 11-37.

Lucas, C. Oliveira., Bon, C. F., Gascón, J. e Casas, J. M. (2014). *Educação Matemática em Revista*, 16, 1-24.

Lajolo, M. (1996). Livro didático: um (quase) manual de usuário. *Em aberto*, 69, 3-7.

Silva, E. T. (1996). Livro didático: do ritual de passagem à ultrapassagem. *Em aberto*, 69, 8-11.

Silva, M. A. (2012). A fetichização do livro didático no Brasil. *Educação e Realidade*, 37, 803-821.

Reflexões sobre as variáveis estatísticas e suas representações em gráficos

Irene Mauricio Cazorla[1], Miriam Cardoso Utsumi[2], Carlos Eduardo Ferreira Monteiro[3]

[1]Universidade Estadual de Santa Cruz, [2]Universidade Estadual de Campinas, [3]Universidade Federal de Pernambuco

Resumo

Neste capítulo desenvolvemos um ensaio teórico que tem como objetivo discutir os fundamentos que embasam as variáveis estatísticas e suas representações gráficas, a fim de sistematizar recomendações desejáveis para seu ensino na Educação Básica. Examinamos os diversos tipos de gráfico para representar as variáveis estatísticas de forma univariada e bivariada, explicitando suas principais características, como também suas vantagens e desvantagens. Postulamos um esquema conceitual que pode auxiliar os professores na escolha e construção dos gráficos, potencializando seu ensino. Tomamos como referência os trabalhos de Cazorla e Arteaga e sistematizamos algumas investigações sobre a construção de gráficos estatísticos. Esperamos que este esquema conceitual auxilie os professores na sua prática.

Palavras-chave: Educação Estatística, variáveis estatísticas, gráficos estatísticos, Educação Básica.

1. Introdução

Os gráficos estatísticos se constituem em uma ferramenta cultural para apresentar dados. Todavia as pessoas não apreendem as informações dos gráficos num processo de decodificação direta, assim é necessário mobilizar diversos conhecimentos relacionados, por exemplo, às variáveis imbricadas nos diversos fenômenos e temáticas associadas aos dados. Num mundo marcado pela revolução computacional que possibilita tratamento de dados com recursos cada vez mais potentes e complexos, estudos que auxiliem leitores na compreensão de dados apresentados em gráficos são muito importantes.

O ensino dos gráficos estatísticos na Educação Básica no Brasil é recomendado desde o final da década de 1990 e ratificado pela Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018). Na Educação Básica, os conteúdos de Estatística fazem parte do currículo de Matemática, cabendo ao professor dessa disciplina trabalhar os aspectos matemáticos formais por trás da construção dos gráficos (Silva & Figueiredo, 2019). Todavia, o uso de gráficos, cada vez mais complexos e em contexto, é realizado em outras disciplinas, tais como: Sociologia e Geografia (Cardoso, 2012) para apresentar e discutir problemas sociais como a distribuição de renda, o processo migratório, a globalização, dentre outros; Ciências da Natureza (Jesus, Fernandes & Leite, 2013) ao trabalhar temas transversais que envolvem dados estatísticos.

Na BNCC (Brasil, 2018) se explicita a necessidade de analisar e identificar, em gráficos divulgados pela mídia, os elementos que podem induzir à erros de leitura, como escalas inapropriadas, legendas não explicitadas, e omissão de informações importantes (fontes e datas). Esse documento também menciona a necessidade da pesquisa amostral envolvendo temas da realidade social, cujos resultados sejam comunicados por meio de relatórios, contendo avaliação de medidas de tendência central e da amplitude, tabelas e gráficos adequados, construídos com o apoio ou não de planilhas eletrônicas.

Ao examinarmos essas orientações e os livros didáticos de Matemática, Geografia e Ciências (Silva & Selva, 2011; Coutinho, 2014; Santos, Santos-Junior & Velasque, 2018), verificamos que os gráficos que devem ser trabalhados na Educação Básica são dos seguintes tipos: setores, pictogramas, barras (colunas), simples ou agrupadas (lado a lado, empilhadas, opostas), linhas, histograma, polígono de frequência e, mais recentemente foram introduzidos o diagrama de ramo e folha e o da caixa (*boxplot*). Assim, neste trabalho sistematizamos os componentes dos gráficos e os apresentamos de acordo com a natureza da variável. Nossas discussões tiveram como referencial teórico os estudos de Cazorla (2002), Martins e Ponte (2010) e Arteaga (2011), bem como revisões de pesquisas anteriores relativa a gráficos.

2. Gráficos estatísticos

Cazorla (2002) define gráfico como uma representação simbólica de dados, geralmente relacionando duas ou mais variáveis, utilizando o sistema de coordenadas cartesianas. O objetivo do gráfico estatístico é comunicar ao leitor um conjunto de informações, numéricas ou não, usando objetos cujas dimensões correspondem às respectivas escalas e cujos valores em cada dimensão se relacionam.

Distinguimos três tipos de arcabouços no qual são construídos os gráficos estatísticos: coordenadas circulares, formado pelo círculo e setores (Fig.1a); pseudo plano cartesiano quando ao menos um dos eixos não segue as propriedades dos eixos cartesianos (Fig. 1b e 1c); e o plano cartesiano, genuíno, formado por dois eixos cartesianos, com pares ordenados numéricos do tipo (x, y) (Fig. 1d).

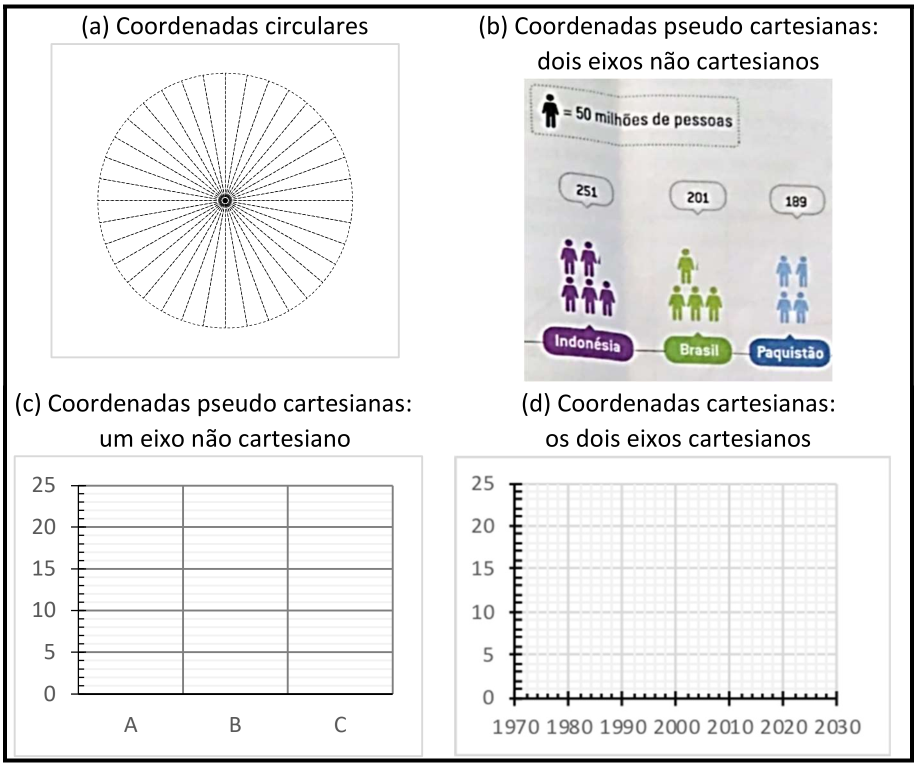


Figura 1. Arcabouços de gráficos estatísticos trabalhados na Educação Básica.
Fonte: Elaboração dos autores

3. Conceitos subjacentes aos gráficos estatísticos

Os gráficos estatísticos envolvem diversos conceitos, dos quais destacamos: população, amostra, variáveis e dados, conforme Figura 2. *População* ou universo é formado por todos os elementos que compõem o objeto de investigação e *amostra*, é um subconjunto dessa população. As variáveis estatísticas constituem-se nas características que investigamos na população ou amostra (Cazorla & Oliveira, 2010) e sua realização geram *dados*, que podem estar em sua forma bruta (*brutos*), isto é, sem tratamento, apresentados de forma solta, isolada, ou organizados em rol, lista, planilha, banco de dados, ou eles podem estar *agrupados* ou *agregados,* quando já sofreram algum tratamento.

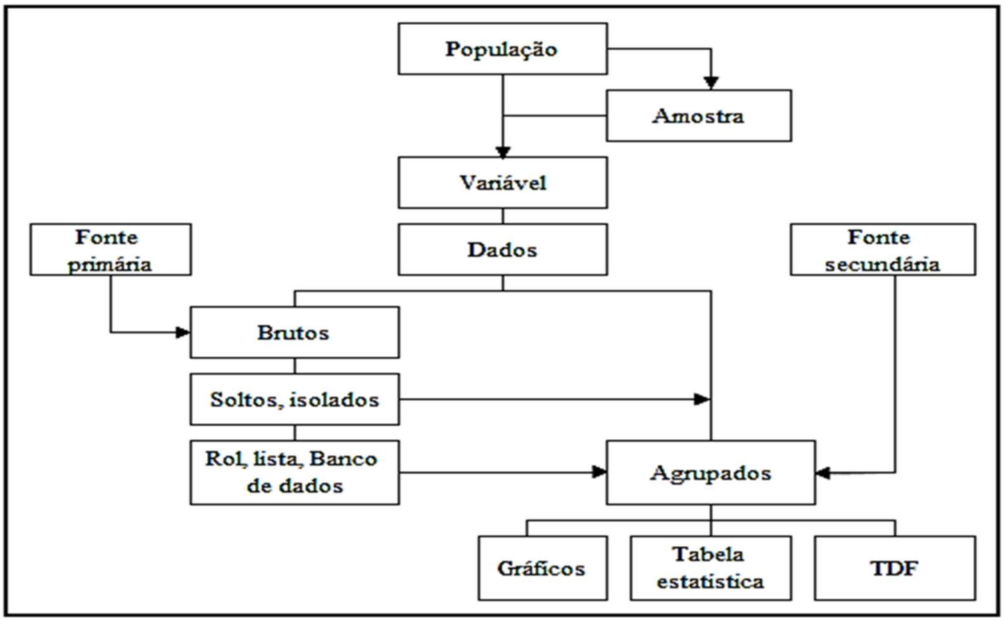


Figura 2. Conceitos estatísticos subjacentes aos gráficos estatísticos.
Fonte: elaborado pelos autores

Os dados podem ser representados em gráficos, tabelas estatísticas ou em tabelas de distribuição de frequências (TDF) restritas a uma variável (simples) ou duas variáveis (dupla entrada). A *fonte* de onde se originaram os dados pode ser primária, quando coletamos os dados, ou secundária quando trabalhamos com dados coletados por outrem.

Em geral, as variáveis estatísticas estão ligadas aos fenômenos das ciências da natureza e das ciências sociais e humanas, como por exemplo, satisfação do cliente, desempenho escolar, gosto pela Matemática etc. As variáveis estatísticas podem ser classificadas, de acordo com sua natureza em qualitativas e quantitativas conforme Figura 3. Observamos que a BNCC adotou os termos categórica e numérica.

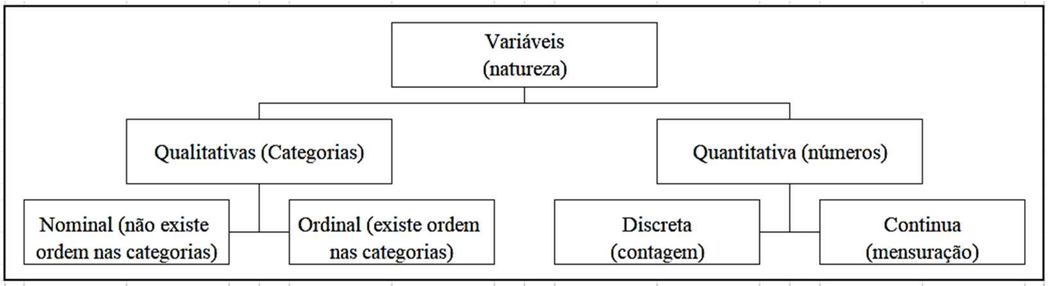


Figura 3. Classificação das variáveis de acordo a sua natureza.
Fonte: elaborado pelos autores

Uma variável qualitativa revela uma característica agrupada em categorias, podendo ser nominal ou ordinal. *Nominal* é quando suas categorias não apresentam ordenação, como por exemplo, *animal de estimação favorito*, com categorias *cachorro*, *gato* etc. Por sua vez, a variável ordinal acontece quando suas categorias apresentam uma ordenação natural, como por exemplo, nível de proficiência em inglês com categorias *básico*, *intermediário* e *superior.* A variável *quantitativa* é aquela cujos resultados são números. As *discretas* são aquelas que tomam valores inteiros positivos, como por exemplo, *número de irmãos*, que assume valores *0, 1, 2, 3 etc.* A variável contínua é resultante de mensuração, como por exemplo o peso (massa corpórea) de um recém-nascido normal, que é esperado variar de 2,9 a 3,3 kg.

Segundo Fernandes, Batanero e Gea (2019, p. 2), “o tipo de variável estatística que queremos estudar determina em grande parte os métodos estatísticos que podem ser usados para a análise dos dados”. Para escolher ou construir um gráfico, o conceito de v*ariável* é crucial, pois o gráfico adequado para representá-la depende de sua natureza (Cazorla & Utsumi, 2010), assim, faz-se necessário verificar a natureza da variável. Na Figura 4 apresentamos os tipos de gráficos de acordo à natureza da variável, quando ela é analisada *per se* (análise univariada).

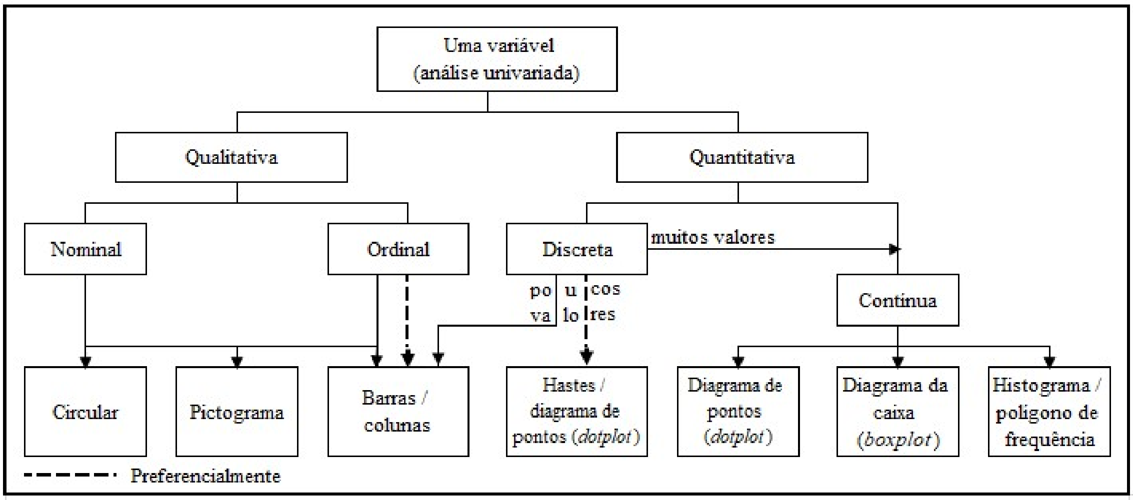


Figura 4. Tipos de gráficos para representar uma variável na Educação Básica.
Fonte: elaborado pelos autores

No caso das variáveis qualitativas, essas devem ser organizadas em tabelas de distribuição de frequência, que contêm as categorias com suas frequências e os tipos de gráficos adequados são os do tipo: pictograma, barras/colunas e setores. No caso das variáveis ordinais não é recomendável o uso do gráfico circular, uma vez que elas podem apresentar tendências entre as categorias e o gráfico circular não permitirá observar essa qualidade. No caso das variáveis discretas que tomam poucos valores, como por exemplo, número de irmãos, os gráficos adequados são o de hastes ou o diagrama de pontos; todavia, nem os documentos oficiais e nem os livros didáticos os mencionam. Além disso, os softwares acessíveis, com exceção do Geogebra não os apresentam em seu menu. No caso das variáveis contínuas ou discretas que tomam muitos valores, essas podem ser representadas pelo diagrama de pontos, da caixa (*boxplot*), ou agrupada em intervalos e representada em histogramas e polígonos de frequência.

A BNCC introduziu o diagrama de ramo e folha, adequado para as variáveis numéricas, mas é um tipo de gráfico complexo para variáveis contínuas e para variáveis cuja ordem de grandeza supera dois dígitos (incluindo os números decimais). Por exemplo, se quisermos representar a idade das pessoas (em anos completos), utilizamos o ramo para representar a dezena e a folha para representar a unidade. Na representação das notas escolares, que variam de zero a dez, o ramo será formado pela unidade e a folha pela primeira casa decimal. Desta maneira, deve-se arredondar as notas para uma casa decimal e quando representarmos o dez, que é a nota máxima, a folha será representada por zeros.

Para representar duas variáveis (Figura 5), os gráficos vão depender da natureza delas. Se as duas são qualitativas, elas devem estar organizadas em uma tabela de dupla entrada e os gráficos são os de barras/colunas compostas (lado a lado, empilhadas e opostas). Embora seja possível utilizar os pictogramas e os gráficos de setores, em geral esses não são eficientes para representar os padrões de comportamento das variáveis. Se uma variável quantitativa está em função do tempo (série temporal) então podemos utilizar os gráficos de barras/colunas ou linhas simples. Se, além disso, a variável quantitativa estiver desdobrada por uma qualitativa estaremos diante de um gráfico de barras/colunas lado a lado, empilhadas ou linhas múltiplas. Observamos que as séries temporais têm sido representadas em barras verticais e muito raramente em barras horizontais, isto é irrelevante se levarmos em consideração que um gráfico de barras vertical (colunas) se transforma em um gráfico horizontal fazendo uma rotação de 90º graus no sentido horário.

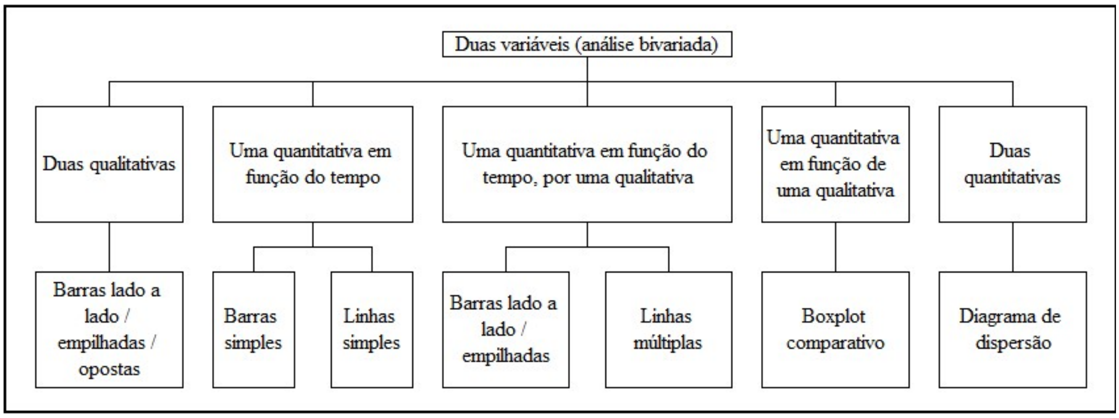


Figura 5. Tipos de gráficos para representar duas variáveis na Educação Básica.
Fonte: elaborado pelos autores

Quando desejamos representar uma variável quantitativa em função de uma qualitativa a melhor opção é um gráfico de caixas múltiplas ou boxplot comparativo e, por fim, se as duas são quantitativas, utilizamos o diagrama de dispersão.

4. Considerações finais

Nossas reflexões indicaram que as relações entre os tipos de gráficos estatísticos e suas escolhas a partir da natureza da variável e do objetivo de sua construção, constituem-se em aspectos importantes para o ensino de Estatística. Após mais de 20 anos de inserção do seu ensino na Educação Básica, os professores ainda enfrentam dificuldades ao analisar o quanto seria adequado um determinado gráfico para um tipo de variável.

Nesse sentido, a comunidade de educadores estatísticos precisaria tornar acessível aos professores os resultados das pesquisas nessa área, bem como continuar a investigar as possibilidades pedagógicas para o ensino de novos gráficos, como o diagrama de ramo e folha e da caixa.

Referências

Arteaga, P. (2011). *Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Granada, Espanha.

Cardoso, H. M. F. (2012). *A apreciação estética na História da Cultura e das Artes e a construção de gráficos na Geografia – Um estudo com alunos do Ensino Secundário*. Dissertação (Mestrado em Ensino de História e de Geografia). Universidade do Minho, Braga, Portugal.

Cazorla, I. M. (2002). *A relação entre a habilidades viso-pictóricas e o domínio de conceitos estatísticos na leitura de gráficos*. Tese de Doutorado em Educação). Universidade de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

Cazorla, I. M. & Utsumi, M. C. (2010). Reflexões sobre o ensino de Estatística na Educação Básica. In I. M. Cazorla & E. Santana (Orgs.). *Do tratamento da Informação ao Letramento Estatístico* (pp. 9-18). Itabuna: Via Litterarum.

Cazorla I. M. & Oliveira, M. S. (2010). Para saber mais. In I. M. Cazorla & E. Santana (Orgs.). *Do tratamento da Informação ao Letramento Estatístico* (pp. 113-144). Itabuna: Via Litterarum.

Coutinho, C. Q. S. (2014). *Letramento estatístico: Qual a contribuição dos livros didáticos?* In L. Andrade (Ed.). Encuentro Colombiano de Educación Estocástica, *Memorias del I Encuentro Colombiano de Educación Estocástica* (pp. 58-66). Bogotá: Asociación Colombiana de Educación Estocástica.

Fernandes, J. A., Batanero, C. & Gea, M. M. (2019). Escolha e aplicação de métodos estatísticos por futuros professores dos primeiros anos. In J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina Portillo (Eds.). Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística, *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-10). Granada: Universidad de Granada.

Jesus, D. S., Fernandes, J. A. & Leite, L. (2013). Relevância dos gráficos estatísticos nos manuais escolares da disciplina de ciências físico-químicas. In L. Fernandes, J. A., Viseu, F., Martinho, M. H. & P. F., Correia, (Orgs.). Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola, *Atas do III Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola* (pp. 145-162). Braga: Centro de Investigação em Educação da Universidade do Minho.

Martins, M. E. G. & Ponte, J. P. (2010). *Organização e tratamento de dados*. Portugal: Ministério da Educação. Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Santos, W. D., Santos-Junior, J. & Velasque, L de S. (2018). O desenvolvimento do letramento estatístico pelos livros didáticos e a Base Nacional Comum Curricular. *REnCiMa*, 9(2), 210-229.

Silva, D. B. & Selva, A. C. V. (2011). Analisando atividades envolvendo gráficos e tabelas nos livros didáticos de matemática. In Conferência Interamericana de Educação Matemática, *Anais da XIII CIAEM-IACME* (pp. 1-12). Recife: Universidade Federal de Pernambuco.

Silva, N. A. & Figueiredo. H. R. S. (2019). A Educação Estatística na Educação Básica do Brasil, Estados Unidos, França e Espanha segundo os documentos curriculares. *Revemat*, 14(Edição Especial Educação Estatística), 1-20.

Análisis de la complejidad semiótica de gráficos y tablas estadísticas

Jocelyn D. Pallauta y Pedro Arteaga
Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo se presentan los niveles de complejidad semiótica para el análisis de gráficos y tablas estadísticas. Este modelo de análisis surge a partir del análisis semiótico de los objetos matemáticos que intervienen tanto en la construcción como el trabajo con dichos gráficos y tablas. Los niveles de complejidad para los gráficos estadísticos se componen de cuatro niveles, mientras que para el caso de las tablas estadísticas los niveles superiores han sido subdivididos teniendo en cuenta los diferentes objetos matemáticos que pueden incorporar, como los variados tipos de frecuencias y los valores agrupados en intervalos. Este modelo ha sido utilizado en variadas investigaciones sobre análisis de libros de texto y en la comprensión de los estudiantes o profesores.

Palabras clave: Niveles de complejidad semiótica, gráficos y tablas estadísticas, análisis semiótico.

1. Introducción

En el contexto actual, las tablas y gráficos estadísticos aparecen con frecuencia en los medios de comunicación, un ejemplo de ello es la exposición diaria de los diferentes datos emanados producto de la crisis sanitaria generada por el COVID-19, como su tasa de crecimiento en diferentes territorios o su letalidad. De modo que cobra especial relevancia, contar con conocimientos estadísticos y habilidades como la estimación proyección e inferencia (Cantoral et al., 2020), que permitan la comprensión de estos objetos matemáticos por parte de la ciudadanía, para valorar de manera crítica los datos y con ello tomar mejores decisiones (Engel, 2019).

Diferentes países en sus documentos curriculares recogen esta necesidad, incorporando a los gráficos y tablas estadísticas en el estudio de la estadística, a partir de los primeros niveles educativos, apuntando al desarrollo de competencias como la representación, resumen, análisis y comunicación de la información. Por tanto, la comprensión de los gráficos y tablas estadísticas cobran especial relevancia en el logro de estas habilidades, por su importancia tanto en la organización como análisis de la información, tratar con estas representaciones implica la realización de procesos de transnumeración (Wild y Pfankunch, 1999) como lo es llevar los datos de un tipo de representación a otro produciendo una nueva información, aspecto relevante en el razonamiento estadístico (Chick, Pfannkuch y Watson, 2005).

En este trabajo profundizamos en el análisis de tablas y gráficos estadísticos, por medio de la aplicación de los niveles de complejidad semiótica, pensados en un principio para los gráficos estadísticos (Arteaga, 2011), estos niveles son recogidos y adaptados para el caso de las tablas estadísticas (Pallauta, Gea y Batanero, 2020), conformándose en un modelo que permite estudiar la dificultad que puede presentar la interpretación de los diferentes tipos de tablas estadísticas.

2. Fundamentos

Nuestro trabajo se sustenta en el enfoque ontosemiótico (Godino, Batanero y Font, 2019) en adelante EOS. Para el EOS la situación-problema, junto con las prácticas matemáticas llevadas a cabo en la resolución de una situación problema posibilitan definir un objeto matemático desde de perspectiva institucional o personal. En la implementación de las prácticas matemáticas participan objetos ostensivos y no ostensivos, los que se representan ya sea de manera textual, oral, gráfica o simbólica. En dichas prácticas, también intervienen una variedad de objetos matemáticos, como: campos de problemas, conceptos, proposiciones, lenguaje, procedimientos y argumentos.

Las representaciones tienen gran importancia en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y esto es recogido por la didáctica de la matemática, sin embargo, se carece de consciencia de la variedad de objetos que pueden desempeñar el papel de representación o representado (Godino et al., 2019). Para abordar este aspecto, los autores recogen la noción de *función semiótica* de Eco como una correspondencia que implica tres componentes: La expresión (objeto inicial, o signo); el contenido (objeto final, o significado del signo); y un criterio o código interpretativo que relaciona la expresión y el contenido.

En las prácticas matemáticas se emplea una diversidad de objetos matemáticos, junto con una variedad de representaciones lo que implica finalmente, un despliegue de procesos interpretativos para dar respuesta a una situación problema. Los procesos que implican gráficos y tablas estadísticas involucran también una serie de objetos matemáticos y una complejidad asociada a su interpretación, contexto en el que surgen los niveles de complejidad semiótica, modelo utilizado en diferentes investigaciones y que son detallados a continuación.

3. Niveles de complejidad semiótica de gráficos

La noción de complejidad semiótica surgió inicialmente, con el estudio de las producciones de gráficos estadísticos de un grupo de profesores en formación de educación primaria de una Universidad española. Luego de un análisis semiótico, como se muestra en la Figura 1, en el que se exploraron conceptos, proposiciones, lenguaje, procedimientos y argumentos, de las prácticas realizadas en la construcción de diferentes tipos de gráficos (Arteaga, 2011; Batanero, Arteaga y Ruiz, 2010).

Para analizar con mayor profundidad los gráficos producidos por los estudiantes, Arteaga y colaboradores definen cuatro niveles de complejidad, en los que se consideran los diferentes objetos matemáticos que pueden estar representados junto con los niveles de lectura (Friel, Curcio y Bright, 2001). Los objetos poseen un rol importante en la función semiótica (Font, Godino y D'Amore, 2007), y pueden incrementar la dificultad del mismo, tanto en su lectura como su construcción. Por ejemplo, en la Figura 1, se muestra un análisis de los diferentes objetos primarios en torno a la construcción de un gráfico de complejidad N3, es una representación en la que aparecen los conceptos de frecuencia y distribución. El detalle con los niveles propuestos es descrito seguidamente.

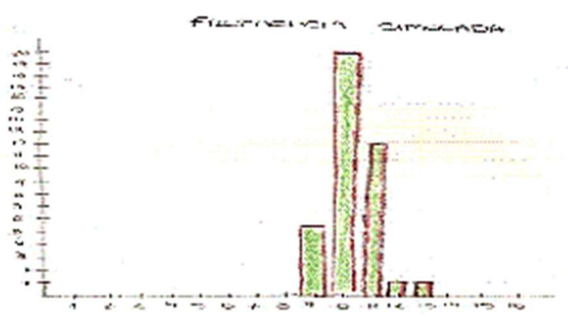
Gráfico de barras separados de cada secuencia	*Configuración cognitiva*
 Lenguaje - Grafico: rectángulos, líneas, marcas - Verbal: título del gráfico - Numérico: etiquetas de las escalas, que representan los números naturales ordenados. - No hay rótulos en los ejes. - El título del gráfico es confuso, pues lo la distribución de frecuencias del número de caras en la secuencia simulada. Procedimientos - Recuento de datos, cálculo de frecuencias - Representación de los ejes: en el eje X representación de los valores de la variable (número de representación de las frecuencias asociadas a cada valor de la variable. - Representación de escalas en los ejes. - Representación de frecuencias mediante barras.	Conceptos y proposiciones - Experimento aleatorio: lanzar 20 veces una moneda - Variables aleatorias: número de caras al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada de longitud 20 por un estudiante genérico. - Variables estadísticas: muestra de tamaño m de los resultados del número de caras al lanzar una moneda equilibrada y número de caras en la secuencia inventada de longitud 20 obtenidas por cada uno de los m estudiantes de cada clase. - Frecuencias de cada posible valor de la variable. - Proporcionalidad (altura de la barra con frecuencia). - Números naturales y orden de los naturales. - Paralelismo y perpendicularidad. - Distribución de la variable (conjunto de valores con su frecuencia). - Moda (valor más frecuente). - Mínimo, máximo y rango.

Figura 1. Análisis semiótico de un gráfico N3 (Arteaga, 2011, p. 164)
Fuente: hecho por los autores

- *Nivel 1* (N1). Representar solo algunos datos aislados de una variable.
- *Nivel 2* (N2). Representar un conjunto de datos asociado a una variable, sin formar la distribución de frecuencias. Se utiliza la idea de variable y sus valores, pero no la de frecuencia o distribución.
- *Nivel 3* (N3). Representar una distribución de frecuencias de una variable, donde ya aparecen los conceptos de frecuencia y de distribución, como se observa en la Figura 1.
- *Nivel 4* (N4). Representar una distribución de frecuencias de dos o más variables. Se emplean todos los objetos anteriores y además, generalmente, se utiliza una misma escala para representar las variables.

El modelo de complejidad semiótica de los gráficos ha sido utilizado en el análisis de la dificultad progresiva de los mismos en libros de texto, por ejemplo, en los trabajos de Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y López-Martín (2015), Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y Gea (2015; 2016). Esta noción también se ha empleada en el diseño de cuestionarios de evaluación de la comprensión gráfica de los niños, entre otros por Díaz-Levicoy, Batanero, Arteaga y Gea (2019).

4. Adaptación de los niveles de complejidad al análisis de tablas estadísticas

Los gráficos y tablas estadísticas se conforman en objetos semióticos complejos, dado que en su interpretación participan una serie de procesos cognitivos (Lahanier-Reuter, 2003) de los que no siempre se es consciente. Al igual que los gráficos, las tablas poseen una estructura, la que en algunos casos coincide con los gráficos, que se compone de los siguientes elementos:

- *Título*, resume el tema que se presenta en la tabla y el tipo de datos recogidos.
- *Las etiquetas*, generalmente, aparecen en la primera fila y columna, estas señalan los sujetos de estudio, las variables y sus categorías. Su interpretación informa sobre las magnitudes y rango de variación considerados para cada variable, y los tipos de frecuencias consideradas.
- *El cuerpo de datos*, conformado por el conjunto de celdas, ubicadas al interior de la tabla, y que contiene diferente tipo de información (datos, frecuencia absoluta o relativa, porcentaje).

A partir del análisis de las tablas estadísticas presentes en los libros de texto chilenos, dirigidos a los cursos finales de educación básica (10 a 13 años), Pallauta, Gea y Batanero (2020) realizan una adaptación de los niveles anteriores dirigido al caso de las tablas estadísticas, teniendo, además, en cuenta los tipos de representaciones tabulares diferenciados por Lahanier-Reuter (2003):

- *Tabla de datos*. Tiene forma de matriz y contiene, para cada individuo de la muestra, los valores de una o varias variables. Correspondería al Nivel N2 descrito por Arteaga y colaboradores.
- *Tabla de distribución de una variable*. Describe la distribución de una variable, dado que asocia cada modalidad de la variable con la frecuencia que presenta dicha modalidad. Este nivel, además, podríamos dividirlo en tres subniveles, dependiendo de si se consideran las frecuencias acumuladas y los intervalos de clase.

- *Nivel de complejidad N3.1*: Tablas de distribución de frecuencias ordinarias: absolutas, relativas o porcentuales.
- *Nivel de complejidad N3.2*: Tablas de distribución de frecuencias, que incluyen también frecuencias acumuladas (absolutas, relativas o porcentuales). Su nivel de complejidad es mayor, porque involucra el manejo de desigualdades.
- *Nivel de complejidad N3.3*: Tablas en que las categorías de la variable se presentan por medio de la agrupación de los valores en intervalo, para cualquier tipo de frecuencia, tanto ordinaria como acumulada. Se añade la idea de intervalo, sus extremos y marca de clase.

- Tabla *de doble entrada o de contingencia*. Representa datos mediante el cruce de dos variables estadísticas. En la parte superior de la tabla (primera fila), se indican las modalidades de una de las variables, mientras que, en la primera columna se indican las modalidades de la segunda variable. El cuerpo de la tabla está formado por las frecuencias conjuntas que corresponde a la modalidad de la fila para la primera variable y de la columna para la segunda variable. Estas tablas, a su vez, podrían contener intervalos de clase, aunque no es habitual considerar frecuencias acumuladas. Por tanto, se podría clasificar este nivel en dos subniveles, según se consideren intervalos de clase o no:

- *Nivel de complejidad N4.1*: Tablas de contingencia de frecuencias ordinarias: absolutas, relativas o porcentuales.
- *Nivel de complejidad N4.2*: Cuando se considera la agrupación de los valores de la variable en intervalo, para cualquier tipo de frecuencia, como se observa en el ejemplo de la Figura 2 en que las categorías de la variable edad (años) aparecen como valores agrupados en intervalos.

Personas que visitaron una biblioteca municipal el sábado					
Género	Intervalo de edad en años				
	5 – 10	11 – 18	19 – 25	26 – 40	41 – 65
Femenino	5	15	21	19	31
Masculino	7	9	19	15	25

Figura 2. Tabla con nivel de complejidad N4.2
Fuente: Castro, Curiche y Vega. (2014, p. 233)

Algunas investigaciones han utilizado directamente los niveles descritos por Arteaga (2011) para gráficos estadísticos, para analizar las tablas estadísticas en libros de texto, por ejemplo, la de García-García, Díaz-Levicoy, Vidal-Henry y Arredondo (2019). A diferencia de ellos, nosotros estamos comenzando a utilizar la clasificación ampliada y en el trabajo descrito de Pallauta et al. (2020) se analizó la distribución de esta variable en libros de 5º a 8º curso chilenos (10 a 13 años).

5. Conclusiones

La idea de complejidad semiótica es un modelo útil para el análisis de la dificultad que pueden presentar tanto gráficos como tablas estadísticas, en las tareas propuestas en libros de texto y en cuestionarios dirigidos a los estudiantes.

La propuesta de subdividir los niveles superiores de complejidad de Pallauta et al. (2020), permite analizar con mayor detalle la dificultad que puede representar para el estudiante, la interpretación de este tipo de representación. Hasta el momento, estos ajustes al modelo inicial han sido poco explotada, por lo que pensamos aplicarla, más adelante, para evaluar la comprensión de las tablas estadísticas por parte de niños chilenos.

El modelo presentado, es una herramienta útil para el profesor, pues le permite analizar de manera previa las diferentes tareas que puede trabajar con sus estudiantes, considerando la dificultad que estas podrían representar para ellos, por la variedad de objetos matemáticos que intervienen en su interpretación, y de la que no siempre se tiene suficiente consciencia.

Agradecimientos: Proyecto PID2019-105601GB-I00 (MICIN) y Grupo FQM126 (Junta de Andalucía) y Beca CONICYT Folio: 72190280.

Referencias

Arteaga, P. (2011). Evaluación de conocimientos sobre gráficos estadísticos y conocimientos didácticos de futuros profesores. Tesis doctoral. Universidad de Granada, Granada, España.

Batanero, C., Arteaga, P., & Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(1), 141-154.

Castro, C., Curiche, A., & Vega, M. (2014). *Sé protagonista, Matemática 8º*. Santiago, Chile: SM Chile.

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P., & Gea, M. M. (2015). Análisis de gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria española. *UNIÓN, 44,* 90-112.

Díaz-Levicoy, D., Batanero, C., Arteaga, P., & Gea, M. M. (2016). Gráficos estadísticos en libros de texto de Educación Primaria: un estudio comparativo entre España y Chile. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *30*(55), 713-737.

Díaz-Levicoy, D. A., Batanero, C., Arteaga, P., & Gea, M. M. (2019). Chilean children's reading levels of statistical graphs. *International Electronic Journal of Mathematics Education 14* (3), 689-700.

Díaz-Levicoy, D. A., Batanero, C., Arteaga, P., & López-Martín, M. M. (2015). Análisis de los gráficos estadísticos presentados en libros de texto de Educación Primaria chilena. *Educação Matemática Pesquisa, 17(*4), pp. 715-739.

Engel, J. (2019). Statistical literacy and society. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, & E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística.* Granada: Grupo FQM-126. Disponible en: www.ugr.es/local/fqm126/civeest.html.

Font, V., Godino, J., & D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. *For the learning of mathematics, 27*(2), 3-9.

Friel, S. N., Curcio, F. R., & Bright, G. W. (2001). Making sense of graphs: Critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in mathematics Education*, 124-158.

García-García, J. I., Díaz-Levicoy, D., Vidal-Henry, S., & Arredondo, E. H. (2019). Las tablas estadísticas en libros de texto de educación primaria en México. *Paradigma 40* (2), 153-175.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach: Implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 38-43.

Pallauta, J.D., Gea, M.M., & Batanero (2020). Un análisis semiótico del objeto tabla estadística en los libros de texto chilenos. *Zetetiké 28,* e020001. https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8656257

Uma discussão do estado de conhecimento sobre interpretação dos gráficos estatísticos do GPEMAR

Leandro do Nascimento Diniz[1], Ivanise Gomes Arcanjo Diniz[2]

[1]Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, [2]Secretaria de Educação do Estado da Bahia

Resumo

Este artigo tem por objetivo analisar um estado do conhecimento de pesquisas sobre interpretação de gráficos estatísticos no Grupo de Pesquisa Educação Matemática no Recôncavo da Bahia, sendo um estudo qualitativo do tipo bibliográfico. Nos estudos analisados, no nível ler os dados (de interpretação dos gráficos) não houve dificuldades. No nível ler entre os dados, há algumas, como na realização de cálculos e na presença do intérprete para os alunos surdos. No nível, ler além dos dados, a literatura pontua dificuldades dos alunos, mas há êxitos devido à mobilização de aspectos socioculturais do tema do cotidiano, bem como são identificados nos itens que solicitam opiniões dos alunos nas questões em livros didáticos analisados. Pretendemos desenvolver novos estudos sobre interpretação dos gráficos presentes nos projetos apresentados nas feiras, alunos surdos e comparativos em diferentes cenários.

Palavras-chave: Educação Estatística. Investigações Estatísticas. Feiras de Ciências e Matemática. Modelagem Matemática. Alunos Surdos.

1. Introdução

Este artigo tem por objetivo analisar um estado do conhecimento de pesquisas sobre interpretação de gráficos estatísticos no Grupo de Pesquisa Educação Matemática no Recôncavo da Bahia - GPEMAR. Com isto, este estudo não só socializará as investigações já desenvolvidas, mas também refletirá, qualitativamente, sobre seus resultados, o que contribuirá para a construção de uma síntese provisória. Por fim, apresentaremos alguns estudos em andamento e sugeriremos novas pesquisas desenvolvidas pelo grupo.

Há um número significativo de investigações sobre a interpretação dos gráficos estatísticos em diferentes níveis escolares, por exemplo, Diniz e Fernandes (2016, 2017), Evangelista e Guimarães (2015) e Fernandes, Morais e Lacaz (2011). De modo geral, percebemos que os estudos sobre esta temática focam na resolução de tarefas pelos alunos, sejam de atividades que solicitam a interpretação de gráficos estatísticos prontos ou construídos pelos alunos em investigações estatísticas. Sabemos da importância destes estudos, os quais apresentam elementos importantes para compreendermos aspectos, como os relacionados às dificuldades de aprendizagem dos estudantes.

Apesar disto, nas buscas que realizou, lacunas de investigações foram identificadas sobre a interpretação dos gráficos estatísticos, como o trabalho em sala de aula com alunos surdos. Além disto, como mencionado, algumas dificuldades de aprendizagem dos estudantes estão sendo refletidas a partir de articulação com outras temáticas de pesquisa da Educação Matemática, como a modelagem matemática e as tecnologias digitais.

Apresentamos, brevemente, a literatura na próxima seção, além de algumas pesquisas desenvolvidas pelo GPEMAR e do método deste artigo. Na seção seguinte, faremos algumas discussões a partir do objetivo e tecemos as considerações finais.

2. Revisão de Literatura, Método do Estudo e Apresentação das Pesquisa do GPEMAR

Esta pesquisa é de natureza qualitativa e do tipo bibliográfica, pois o foco é realizar uma

> revisão de estudos ou processo tendo como material de análise documentos escritos e/ou produções culturais a partir de acervos. [Com isto, esperamos] realizar uma análise crítica de um conjunto de estudos realizados, tentando extrair deles informações adicionais que permitam produzir novos resultados, transcendendo aqueles anteriormente obtidos (Fiorentini & Lorenzato, 2006, p. 71).

Algumas pesquisas do GPEMAR foram refletidas a partir das análises de dados quanto à interpretação dos gráficos estatísticos. Assim, conforme os autores mencionados anteriormente, denomina-se este estudo de estado de conhecimento.

Os estudos do estado de conhecimento serão apresentados nesta seção a partir da literatura de Curcio (1987) e Monteiro (2006), as quais são as principais utilizadas sobre neles sobre a interpretação dos gráficos estatísticos. O primeiro apresenta os três níveis de compreensão dos gráficos: ler os dados (leitura pontual de dados apresentados), ler entre os dados (valores dos dados são comparados ou combinados, dentre outras possibilidades) e ler além dos dados (inferimos dados a partir do que estão presentes no gráfico). Para que um leitor consiga atingir um nível de complexidade, ele precisa compreender os níveis anteriores e não necessariamente um nível maior significa que os estudantes terão maiores dificuldades para a compreensão.

Já Monteiro (2006) afirma que além do conhecimento matemático, pontuado acima, há outros tipos de conhecimento, que foram nomeados por Diniz (2016) de aspectos socioculturais, os quais podem ser mobilizados pelos alunos quando interpretam gráficos. Os conhecimentos do contexto social, político e/ou econômico do tema do gráfico (referência contextual) podem ser mencionados pelos estudantes, assim como experiências pessoais sobre o tema (exemplificação pessoal), além de revelar sentimentos e emoções (expressão afetiva). Diniz (2016) acrescentou os conhecimentos etnomatemáticos, uma vez que conhecimentos matemáticos não-escolares também podem moldar a interpretação de gráficos.

Uma das pesquisas do GPEMAR é a tese de doutorado do primeiro autor, a qual teve por objetivo analisar a leitura, construção e interpretação de gráficos estatísticos em projetos de modelagem[3] com uso das tecnologias digitais (Diniz, 2016). No contexto de um colégio público de ensino médio técnico, os alunos desenvolveram projetos de modelagem numa perspectiva sociocrítica, a partir do tema agricultura familiar~~,~~ definido previamente pelos docentes do colégio. Na perspectiva sociocrítica, a Matemática é meio

[3] A partir deste ponto, ao se referir a modelagem matemática na Educação Matemática, será usado apenas o termo modelagem.

para compreensão da realidade (Barbosa, 2006). Para isto, após a definição de um objetivo geral, os estudantes coletaram dados com diferentes procedimentos metodológicos, como entrevistas, buscaram informações na Internet e nos livros. Considerando uma parte dos dados coletados, algumas equipes construíram gráficos e tabelas.

Em 17% dos gráficos construídos pelos alunos, o autor não conseguiu identificar o nível de Curcio (1987). A partir dos níveis identificados pelo autor, 9% dos gráficos construídos, os quais são do nível 1, eles não apresentaram dificuldades. Já no nível 2 (35%), as maiores dificuldades dos alunos foram a identificação dos valores extremos, uma vez que precisaram mobilizar conhecimentos prévios de Matemática para interpretarem os dados, em contextos que buscaram compreender os gráficos a partir do paradigma do exercício (Skovsmose, 2000). Já no nível 3 (39%), os alunos realizaram a interpretação dos gráficos conjuntamente com os aspectos socioculturais. Como resultados desta investigação, além dos aspectos pontuados na literatura, destacou-se a produção de conhecimentos coletivos e reflexivos, a partir da Educação Matemática Crítica (Skovsmose, 2007) e a produção de conhecimentos etnomatemáticos, além de apresentar melhores resultados do que a literatura sobre as dificuldades de aprendizagem dos estudantes nas questões do nível 3.

A partir de um dos projetos de modelagem de Diniz (2016), do curso técnico de enfermagem, Silva (2017)[4] o transformou numa tarefa, a qual tinha texto e questões e analisou a interpretação dos gráficos pelos alunos de outra turma do mesmo curso. Por sua vez, Reis (2018)[5] pesquisou como os alunos interpretaram gráficos estatísticos presentes nas questões do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) de 2017. Já Pereira (2018)[6] investigou a interpretação de gráficos realizada por alunos do 9º ano num contexto de aulas tradicionais de Matemática. Santos (2019)[7] investigou como alunos do 7º ano (surdos e ouvintes) realizaram interpretação de gráficos numa investigação estatística (ou projeto de estatística). Estes estudos foram realizados por alunos do curso de licenciatura em Matemática da UFRB, sob a orientação do primeiro autor.

Na primeira turma do curso de Especialização em Ensino de Ciências e Matemática da UFRB, como continuidade ao estudo anteriormente realizado, foi pesquisado a construção e interpretação de gráficos estatísticos num livro didático do ensino médio (Silva, 2019)[8], o qual era adotado em Amargosa (*campus* da UFRB em que o curso foi realizado), com base nas competências exigidas para os gráficos estatísticos na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (Brasil, 2018).

---

[4] Silva, F. S. S. (2017). *Interpretação de gráficos estatísticos por meio da modelagem matemática.* Monografia de Graduação, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Amargosa.
[5] Reis, R. S. (2018). *Interpretação de gráficos estatísticos na prova do ENEM.* Monografia de Graduação, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Amargosa.
[6] Pereira, B. V. (2018). *Interpretação de gráficos estatísticos em aulas tradicionais de Matemática.* Monografia de Graduação, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Amargosa.
[7] Santos, E. A. (2019). *Uma investigação matemática no ensino de gráficos estatísticos junto a alunos surdos e ouvintes.* Monografia de Graduação, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Amargosa.
[8] Silva, F. S. S. (2019). *A interpretação e a construção de gráficos estatísticos em livros didáticos de matemática com base nas orientações da base nacional comum curricular.* Monografia de Especialização, Universidade Federal do Recôncavo da Bahia, Amargosa.

O texto mais recentemente publicado tem a parceria dos dois autores deste artigo com um filósofo e o objetivo é analisar uma atividade construída com foco na interpretação de gráficos estatísticos a partir de temáticas que versem sobre a interseccionalidade entre sexo e raça, considerando aspectos econômicos e sociais das cidades de Salvador-BA e São Paulo-SP, entre 2011 e 2017 (Diniz, Diniz & Santos, 2020)[9]. Destacamos que a análise qualitativa de uma atividade com três questões foi realizada com dados que revelam a presença do racismo estrutural em diferentes setores econômicos, bem como na ausência de equidade social para a população negra, especialmente da mulher.

Após a apresentação das pesquisas sobre gráficos estatísticos realizadas no GPEMAR, realizaremos algumas discussão e as considerações finais.

3. Discussões e considerações finais

Quanto ao nível 1 de Curcio (1987), de modo geral, os estudos destacados na seção anterior concluíram, conforme também ocorreu em outras investigações, como Fernandes e Morais (2001), os alunos não apresentaram dificuldades.

Já no nível 2, os estudantes, geralmente, não encontraram dificuldades para compararem os valores presentes nos gráficos, como ocorreu na identificação do valor mínimo de uma variável. Alguns estudos apresentam algumas particularidades neste ponto, como em Silva (2017), em que alguns alunos apresentaram dificuldades na identificação de um valor máximo, pois, segundo a autora, fizeram referência ao contexto social do tema do cotidiano, o que foi condicionado pelo modo como a questão se apresentava.

Ainda neste nível, alguns estudos, como Pereira (2018), foram identificadas dificuldades dos alunos com os cálculos, como de regra de três. Ao notar isto, a professora, que aplicou a atividade, atuou de modo a direcionar os alunos para a solução dos exercícios, já que atuava no contexto do paradigma do exercício, o que gerou percentual maior de acertos nas resoluções das questões.

Reis (2018) percebeu que os alunos apresentaram dificuldades nas escalas do gráfico, uma vez que consideravam a interpretação complexa. Parte das dificuldades dos alunos neste nível, segundo o autor, também se refere às dificuldades em conhecimentos prévios de Matemática.

Apesar da defesa na literatura e também na BNCC quanto ao uso de dados reais em gráficos estatísticos, Silva (2019) identificou questão no livro didático analisado com dados fictícios. A autora também identificou algumas ausências nos livros de aspectos defendidos pela BNCC, como a articulação com outras unidades temáticas da Matemática. Além disto, ela afirmou que poderiam ter questões, como com o uso de tecnologias digitais, para a articulação com outros conteúdos de Estatística, como nas atividades com a combinação, em que é necessário juntar diferentes valores de uma variável, adicionando alguns valores ou também com a igualização, em que se calcula quanto um valor falta para atingir o outro valor da variável. Silva (2019) também destaca que não há, no livro didático analisado, atividades com gráficos tendo erros, para que os

[9] Diniz, I. G. A., Diniz, L. N., & Santos, L. R. F. (2020). Uma proposta de sequência didática para ensino de gráficos estatísticos a partir da interseccionalidade entre sexo e raça com temáticas de uma análise socioeconômica. *Revista Binacional Brasil Argentina*, *9*(1), 331-358.

estudantes possam analisá-los. Ela faz uma ressalva que os livros analisados foram editados antes da versão final da BNCC, mas isto não inviabiliza o olhar crítico realizado.

Quanto às questões do nível 3, pesquisas como Diniz (2016) e Silva (2017) destacaram que os alunos não apresentaram dificuldades como pontuadas pela literatura (Fernandes & Morais, 2001). Isto ocorreu, pois de modo geral, mobilizaram não só conteúdos matemáticos e/ou estatísticos na interpretação dos gráficos, mas também recorreram aos aspectos socioculturais para a compreensão das informações presentes nos gráficos.

Em alguns estudos, não foram identificadas questões deste nível. Em Pereira (2018), não há atividades pois não foram encontradas no livro didático adotado. Também não houve questões do nível 3 na prova do ENEM de 2017 e, portanto, também não fez parte da pesquisa de Reis (2018). No estudo de Silva (2019), poucas questões foram identificadas neste nível, o que fez com que a autora sugerisse a sua ampliação.

Quanto aos aspectos socioculturais, além do que já pontuamos articulados com o nível 3, um avanço notado por Silva (2019) foi ter questões com níveis 2 ou 3 nos livros didáticos analisados e contendo itens que solicitavam opiniões dos alunos sobre o tema do cotidiano presente nos gráficos, sempre após a resolução de itens identificados com algum dos níveis de Curcio (1987). Acreditamos que isto precisa ser valorizado e ampliado, uma vez que poderia contribuir na compreensão dos gráficos analisados.

Em Santos (2018), os alunos do 7º ano tiveram que coletar, organizar e analisar dados, construindo gráficos. O estudo iniciou destacando a inclusão, pois os estudantes surdos coletaram dados, realizaram entrevistas com colegas da turma, sendo possível que tivessem uma vivência diferente das demais nas aulas de Matemática. Numa atividade de investigação estatística, adaptada de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), os alunos foram reunidos em grupos. A autora relata a dificuldade que tiveram em algumas questões, o que é analisado pelo fato de não estarem acostumados com tarefas investigativas. Com isto, deve-se pensar o papel da intérprete neste processo e como a docente pode abordar o planejamento com esta profissional antes da sua realização, uma vez que ela influencia na construção de um gráfico por um aluno surdo e, com isto, houve um erro na escala de um gráfico de barras, pois teve equívoco do rótulo e no valor da variável idade, uma vez que deveria apresentar no rótulo a quantidade de alunos com determinada idade e não a idade.

Em estudo realizado por Diniz, Diniz e Santos (2020), os quais destacam a importância da discussão da média salarial e nível de formação educacional para compreensão das desigualdades sociais no Brasil, especialmente quando se lança luzes nos dados estatísticos das mulheres negras. Os autores acreditam que realizar atividades como estas em escolas públicas pode ser importante para que possamos não só relacionar os conteúdos escolares com as vivências dos estudantes, mas principalmente para que eles possam interpretar dados, opinar sobre os temas, refletirem sobre o uso da Matemática em diferentes contextos (Skovsmose, 2007). Com isto, teríamos as condições para operacionalizar o letramento estatístico, uma vez que os conteúdos, além de serem compreendidos, incluindo seus conhecimentos prévios que precisam ser mobilizados, podem também ser utilizados para compreensão do cotidiano, a partir de reflexões críticas e tomada de decisões (Gal, 2002).

Quanto aos novos estudos que estamos realizando, há alguns sobre a Covid-19, uma vez que muitos gráficos estatísticos são utilizados pela mídia, incluindo termos que não eram comuns à maioria das pessoas, como a média móvel. Outras pesquisas estão sendo desenvolvidas em monografias, como a análise da aplicação de tarefas a alunos do Ensino Médio com gráficos box-plot (caixa), de livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental (6º ao 9º ano) e outros trabalhos no contexto com alunos surdos. Ainda temos interesse em investigações com o uso das tecnologias digitais e com as feiras de Ciências e Matemática e com alunos dos anos iniciais do ensino fundamental (1º ao 5º ano).

Assim, convidamos e solicitamos aos pesquisadores interessados para que possam realizar estes estudos propostos e estabelecermos parcerias entre as possibilidades aqui apresentadas e outras que possam surgir, incluindo estudos comparativos em diferentes contextos, uma vez que existem lacunas identificadas e outras que ainda podem ser.

Referências

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: a social-critical and discursive perspective. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *38*(3), 293-301.

Brasil (2018). *Base nacional comum curricular.* Brasília: Ministério da Educação.

Curcio, F. (1987). Comprehension of mathematical relationship expressed in graphs. *Journal for Research in Mathematics Education*, *18*(5), 382-393.

Diniz, L. N. (2016). *Leitura, construção e interpretação de gráficos estatísticos em projetos de modelagem matemática com uso das tecnologias de informação e comunicação*. Tese de Doutorado, Universidade do Minho, Braga.

Diniz, L. N., & Fernandes, J. A. S. (2017). Refletindo sobre a interpretação de gráficos estatísticos em projetos de modelagem matemática com uso das tecnologias digitais: a presença de conhecimentos etnomatemáticos. *X Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática* (pp. 1-14). Maringá: Universidade Estadual de Maringá.

Diniz, L. N., & Fernandes, J. A. S. (2016). Interações entre construção e interpretação de gráficos estatísticos em projetos de modelagem matemática com uso de tecnologias de informação e comunicação. *Revista Vidya*, *36*(2), 457-475.

Evangelista, B., & Guimarães, G. (2015). Representando e interpretando escalas em gráficos. *4º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 1297-1308). Ilhéus: Universidade Estadual de Santa Cruz.

Fernandes, J. A., & Morais, P. C. (2011). Leitura e interpretação de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade. *Educação Matemática Pesquisa*, *13*(1), 95-115.

Fernandes, J. A., Morais, P. C., & Lacaz, T. V. S. (2011). Representação de dados através de gráficos estatísticos por alunos do 9º ano de escolaridade. *XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática* (pp. 1-12). Recife: Universidade Federal de Pernambuco.

Fiorentini, D., & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores Associados.

Gal, I. (2002). Adult statistical literacy: meaning, components, responsabilities. *International Statistical Review*, *70*(1), 1-25.

Monteiro, C. E. F. (2006). Explorando a complexidade da interpretação de gráficos entre professores em formação inicial. *Cadernos de Estudos Sociais*, *22*(2), 211-224.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Skovsmose, O. (2007). *Educação crítica: incerteza, matemática e responsabilidade*. (Traduzido por Maria Aparecida Viggiani Bicudo). São Paulo: Cortez.

ISBN: 978-65-990615-4-7
9 786599 061547